

泸州市高 2021 级第三次教学质量诊断性考试

数 学 (理科)

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分. 第 I 卷 1 至 2 页, 第 II 卷 3 至 4 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

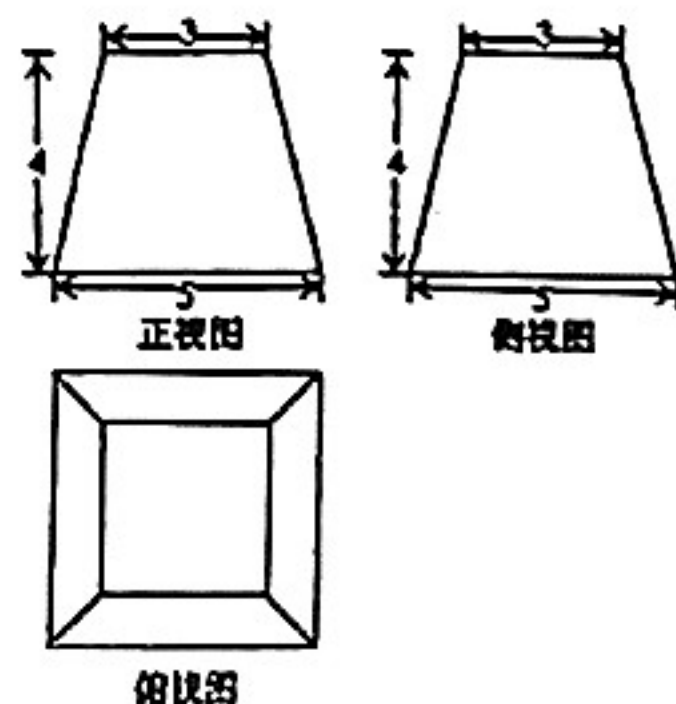
注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题的答案标号涂黑.
3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内, 作图题可先用铅笔绘出, 确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚, 写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $(2-i) \cdot z = 5i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$
A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. 5
2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{0, a\}$, 若 $A \cap B$ 中有且仅有一个元素, 则实数 a 的取值范围为
A. $(-1, 3)$ B. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ C. $(-3, 1)$ D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$
3. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -14$, $a_2 + a_4 = -20$, 则 S_n 取最小值时, n 的取值为
A. 6 B. 7 C. 7 或 8 D. 8 或 9
4. 一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 满足 $x_i - x_{i-1} = 2 (2 \leq i \leq 10)$, 若去掉 x_1, x_{10} 后组成一组新数据, 则新数据与原数据相比, 下列说法正确的是
A. 极差变大 B. 平均数变大 C. 方差变小 D. 中位数变小
5. 《九章算术》是一本综合性的历史著作, 全书总结了战国、秦、汉时期的数学成就, 标志着中国古代数学形成了完整的体系. 在书中的《商功》一章里记录了“方亭”的概念, 以下是一个“方亭”的三视图, 则它的侧面积为
A. $8\sqrt{17}$ B. 64
C. $16\sqrt{17}$ D. $16\sqrt{15}$



6. 已知点 $M(4,4)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, F 为 C 的焦点, 直线 MF 与 C 的准线相交于点 N , 则 $|MN| =$

A. $\frac{25}{3}$ B. $\frac{20}{3}$ C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{25}{4}$

7. 如图, 高速服务区停车场某片区有 A 至 H 共 8 个停车位(每个车位只停一辆车), 有 2 辆黑色车和 2 辆白色车要在该停车场停车, 则两辆黑色车停在同一列的条件下, 两辆白色车也停在同一列的概率为

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{10}$

A	B	C	D
E	F	G	H

8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{2\pi}{3}) (\omega > 0)$ 在 $[0, \pi]$ 有且仅有三个零点, 则 ω 的取值范围是

A. $[\frac{8}{3}, \frac{11}{3}]$ B. $[\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$ C. $[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}]$ D. $[\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$

9. 已知函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(x) + f(4-x) = 0$, 若函数 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{x-2}$ 图象的交点横坐标分别

为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则 $\sum_{i=1}^n x_i =$

A. $4n$ B. $2n$ C. n D. 0

10. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线, 切点为 A , 直线 FA 与 C 的渐近线在第一象限交于点 B , 若 $\overline{FB} = 3\overline{FA}$, 则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P 为 DD_1 的中点, 过 A, B, P 三点作平面 α , 则该正方体的外接球被平面 α 截得的截面圆的面积为

A. $\frac{13\pi}{5}$ B. $\frac{16\pi}{5}$ C. 3π D. $\frac{14\pi}{5}$

12. 已知 $x > 0$, $e^x + \ln y = 1$, 给出下列不等式

(1) $x + \ln y < 0$; (2) $e^x + y > 2$; (3) $\ln x + e^y < 0$; (4) $x + y > 1$

其中一定成立的个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

注意事项：

(1) 非选择题的答案必须用 0.5 毫米黑色签字笔直接答在答题卡上，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚，答在试题卷和草稿纸上无效。

(2) 本部分共 10 个小题，共 90 分。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题纸上）。

13. 已知函数 $f(x) = (\frac{a}{2^x+1} - 1)\sin x$ 是偶函数，则实数 $a =$ _____。

14. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$ ，且 $(a-b) \cdot b = 0$ ，则 a 与 b 夹角的大小为 _____。

15. 动直线 $l: mx + y - 2m - 1 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 25 = 0$ 截得弦长的最小值为 _____。

16. 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_9 = \ln a_{10} > 0$ ，记 $T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ ，则当 q 最小时，使 $T_n \geq 1$ 成立的最小 n 值是 _____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. （本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $AB = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ， AC 与 BD 交于点 O ， $OP \perp$ 底面 $ABCD$ ， $OP = 2\sqrt{3}$ ，点 E, F 分别是棱 PA, PB 的中点，连接 OE, OF, EF 。

(I) 求证：平面 $OEF \parallel$ 平面 PCD ；

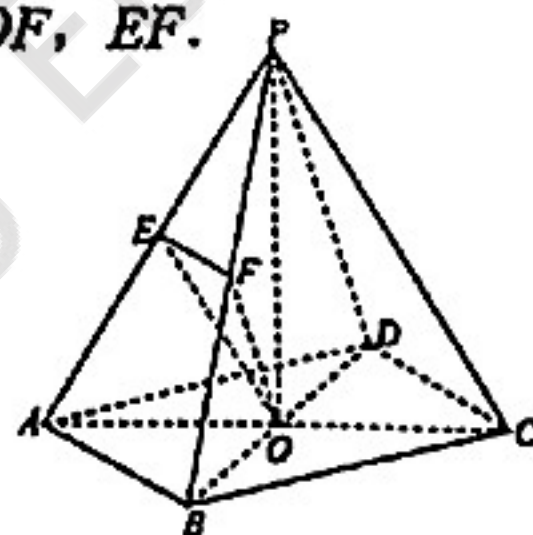
(II) 求二面角 $A-EF-O$ 的余弦值。

18. （本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a^2 = b^2 + c^2 - 48$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ 。

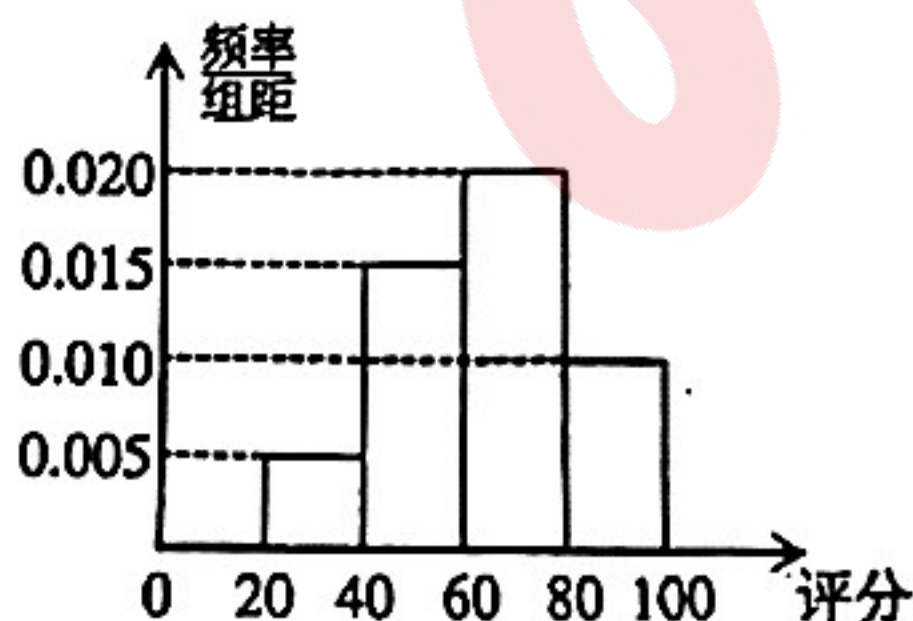
(I) 求 $\tan A$ 的值；

(II) 若 D 是 AC 边的中点， $\cos C = \frac{\sqrt{7}}{14}$ ，求 BD 的长。

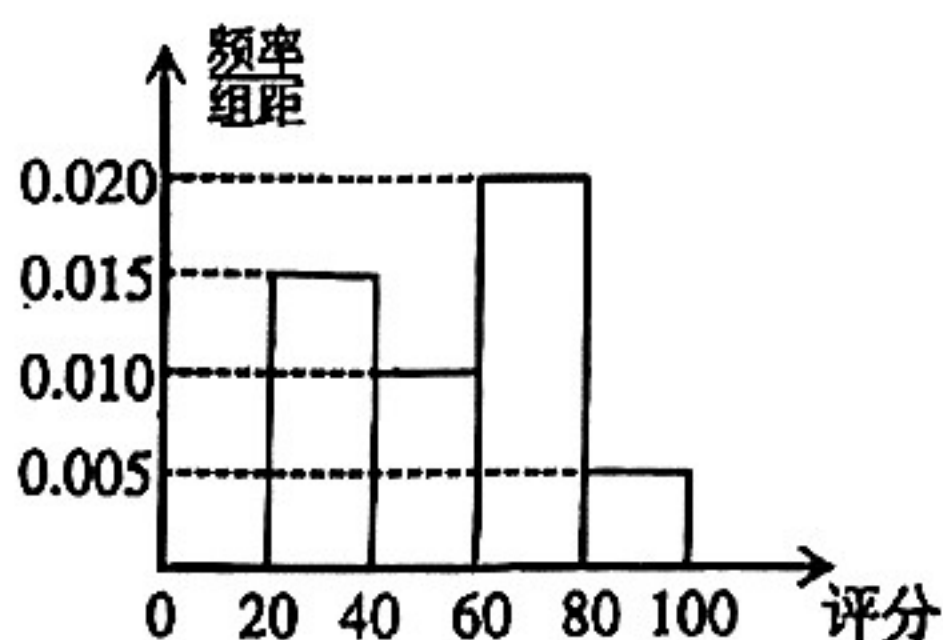


19. （本小题满分 12 分）

随着全国新能源汽车推广力度的加大，新能源汽车消费迎来了前所未有的新机遇。某公司生产了 A、B 两种不同型号的新能源汽车，为了解大众对生产的新能源汽车的接受程度，公司在某地区采用随机抽样的方式进行调查，对 A、B 两种不同型号的新能源汽车进行综合评估，综合得分按照 $[20, 40), [40, 60), [60, 80), [80, 100]$ 分组，绘制成评估综合得分的频率分布直方图（如图）：



A 型号评估综合得分频率分布直方图



B 型号评估综合得分频率分布直方图

(I) 以调查结果的频率估计概率, 从 A、B 两种不同型号的新能源汽车中各随机抽取一辆, 以 X 表示这两辆中综合得分不低于 80 分的辆数, 求 X 的分布列和数学期望;

(II) 为进一步了解该地区新能源汽车销售情况, 某机构根据统计数据, 用最小二乘法得到该地区新能源汽车销量 y (单位: 万台) 关于年份 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 4.7x - 9495.2$, 且销量的方差 $s_y^2 = 50$, 年份的方差为 $s_x^2 = 2$. 求 y 与 x 的相关系数 r , 并据此判断该地区新能源汽车销量 y 与年份 x 的相关性强弱.

参考公式: (i) 线性回归方程: $\hat{y} = \hat{b}x + a$, 其中 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $a = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$;

(ii) 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ (若 $r \in [0, 0.25]$, 则相关性较弱; 若 $r \in [0.30, 0.75]$,

则相关性较强; 若 $r \in [0.75, 1]$, 则相关性很强).

20. (本小题满分 12 分)

已知 A, B 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点和上顶点, 椭圆中心 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 且椭圆 E 过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 若过点 $P(a, b)$ 的直线与椭圆 E 相交于 M, N 两点, 过点 M 作 x 轴的平行线分别与直线 AB, NB 交于点 C, D . 试探究 M, C, D 三点的横坐标是否成等差数列, 并说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = axe^x - 1 (a > 0)$,

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(II) 若 $|f(x)| > x + x \ln x$ 恒成立, 求函数 $f(x)$ 的零点 x_0 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程.

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$. 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C_1 和 C_2 的极坐标方程;

(II) 若直线 $l: y = kx$ (其中 $k \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$) 与曲线 C_1, C_2 的交点分别为 A, B (A, B 异于原点), 求 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$ 的取值范围.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲.

设函数 $f(x) = |2x - 2| + |x + 2|$.

(I) 解不等式 $f(x) \leq 6 - x$;

(II) 设函数 $f(x)$ 的最小值为 T , 正数 a, b, c 满足 $a + b + c = T$, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{3}$.