

泸州市高 2021 级第三次教学质量诊断性考试

数 学 (文科) 参考答案及评分意见

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.
3. 解答右侧所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数, 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	C	C	A	A	B	B	B	D	C

二、填空题:

13. 2; 14. $\frac{\pi}{3}$; 15. $2\sqrt{23}$; 16. $(n+1) \cdot 2^{n-2}$.

三、解答题:

17. 解: (I) 因为底面 $ABCD$ 是矩形, AC 与 BD 交于点 O ,

所以 O 为 AC 中点, 1 分

点 E 是棱 PA 的中点, F 是棱 PB 的中点,

所以 OE 为 $\triangle ACP$ 的中位线, OF 为 $\triangle BDP$ 的中位线,

所以 $OE \parallel CP$, $OF \parallel DP$, 2 分

因为 $OE \not\subset$ 平面 DCP , $PC \subset$ 平面 DCP ,

所以 $OE \parallel$ 平面 DCP , 3 分

因为 $OF \not\subset$ 平面 DCP , $DP \subset$ 平面 DCP ,

所以 $OF \parallel$ 平面 DCP , 4 分

而 $OE \cap OF = O$, $OE \subset$ 平面 OEF , $OF \subset$ 平面 OEF ,

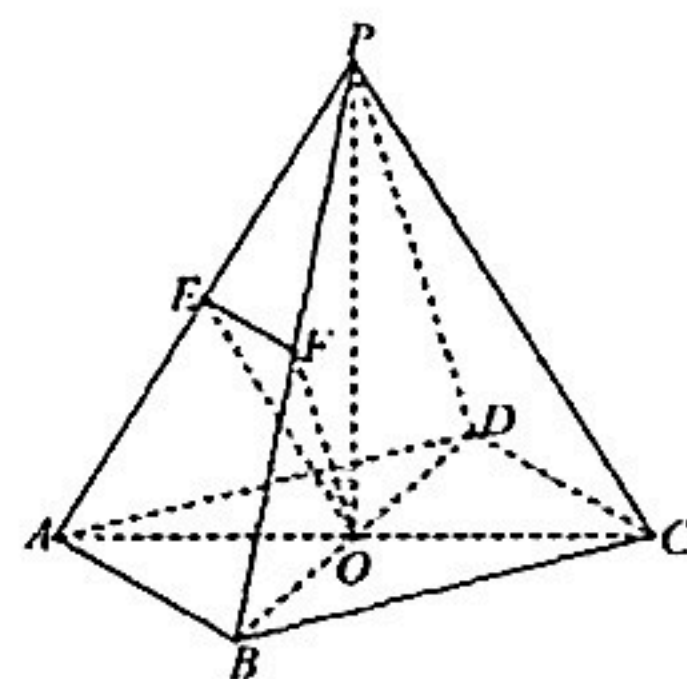
所以平面 $OEF \parallel$ 平面 PCD ; 5 分

- (II) 因为底面 $ABCD$ 是矩形, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, 6 分

所以 $\triangle OAB$ 为等边三角形, 7 分

所以 $OB = OA = AB = 2$,

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, 8 分



根据体积相等法可知 $V_{O-ABE} = V_{E-OAB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABO} \cdot \frac{1}{2} OP = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$, 12 分

18. 解: (I) 由题意, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 6\sqrt{3}$, 1 分

所以 $bc \sin A = 12\sqrt{3}$ 2 分

$\triangle ABC$ 中, 由余弦定理有:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \sin A}{2bc \sin A} = \frac{48 \sin A}{24\sqrt{3}}, \text{ 5 分}$$

$$\tan A = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ 6 分}$$

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 (I) 知: $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 A 为锐角, 7 分

$$\text{且 } \sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos A = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{ 8 分}$$

所以 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$= \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{14}, \text{ 9 分}$$

$$\text{由正弦定理, 有 } \frac{c}{\frac{3\sqrt{21}}{14}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \text{ 所以 } \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{7}}{3}, \text{ 10 分}$$

$$\text{又 } bc \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = 12\sqrt{3}, \text{ 所以 } bc = 12\sqrt{7},$$

$$\text{解得: } b = 2\sqrt{7}, c = 6, \text{ 11 分}$$

$$\text{所以 } BD = \sqrt{6^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7}} = \sqrt{19}. \text{ 12 分}$$

19. 解: (I) 设 A、B 两种不同型号的新能源汽车的得分平均数分别为 $\overline{x_A}, \overline{x_B}$, 由题可知:

$$\overline{x_A} = 30 \times 0.1 + 50 \times 0.3 + 70 \times 0.4 + 90 \times 0.2 = 64, \text{ 2 分}$$

$$\overline{x_B} = 30 \times 0.3 + 50 \times 0.2 + 70 \times 0.4 + 90 \times 0.1 = 56, \text{ 2 分}$$

由于 $\overline{x_A} > \overline{x_B}$, 所以 A 种型号的新能源汽车接受程度更高; 5 分

$$\begin{aligned} \text{(II) 相关系数为: } r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2}} \text{ 7 分} \end{aligned}$$

$$= b \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \hat{b} \frac{\sqrt{ns_x^2}}{\sqrt{ns_y^2}} = \hat{b} \frac{\sqrt{s_x^2}}{\sqrt{s_y^2}}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } r = 4.7 \times \sqrt{\frac{2}{50}} = 4.7 \times \frac{1}{5} = 0.94 > 0.75, \text{ 故 } y \text{ 与 } x \text{ 线性相关很强.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解：(1) 依据题意得：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ab=1 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ 又 } a^2=b^2+c^2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1; \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 解法 1：由题意知，直线 MN 的斜率存在且不为 0，直线过点 $P(2,1)$ ，

所以设直线 MN ： $y-1=k(x-2)$ ， $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y-1=k(x-2) \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \text{ 可得： } (1+4k^2)x^2+8k(1-2k)x+16k^2-16k=0,$$

$$\Delta = [8k(1-2k)]^2 - 4(1+4k^2)(16k^2-16k) = 64k > 0,$$

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则： } x_1+x_2 = \frac{16k^2-8k}{1+4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{16k^2-16k}{1+4k^2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为 l_{AB} ： $x+2y-2=0$ ， 所以 $C(2-2y_1, y_1)$ ，

当 $x_2=0$ 时， l_{BN} ： $x=0$ ， 此时点 M 坐标为 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ ， 点 C 坐标为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ，

满足 $x_1+x_D=2x_C$ ；

当 $x_2 \neq 0$ 时， 因为 l_{BN} ： $y = \frac{y_2-1}{x_2}x+1$ ，

$$\text{令 } y=y_1 \text{ 可得： } x_D = \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } l_{BN} \text{： } y = \frac{y_2-1}{x_2}x+1, \text{ 令 } y=y_1 \text{ 可得： } x_D = \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

下面证明： $x_1+x_D=2x_C$ ， $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{即证： } x_1 + \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1} = 4-4y_1, \text{ 即证：}$$

$$x_1(y_2-1) + (y_1-1)x_2 = (4-4y_1)(y_2-1), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{整理可得即证： } (8k^2+2k)(x_1+x_2) - (4k^2+2k)x_1x_2 = 16k^2, \quad (*) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } (8k^2+2k)(x_1+x_2) - (4k^2+2k)x_1x_2,$$

$$= (8k^2 + 2k) \left(\frac{16k^2 - 8k}{1 + 4k^2} \right) - (4k^2 + 2k) \cdot \frac{16k^2 - 16k}{1 + 4k^2} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$= \frac{64k^4 + 16k^2}{1 + 4k^2} = 16k^2,$$

所以上式(*)成立, 原式得证. 12 分

解法 2: 设直线 MN : $x = my + n$, 因为直线过点 $P(2,1)$, 所以 $m + n = 2$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x = my + n \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \text{ 可得: } (m^2 + 4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = 4m^2n^2 - 4(m^2 + 4)(n^2 - 4) = 16(m^2 - n^2 + 4) > 0,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则: } y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 4}, y_1y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

因为 l_{AB} : $x + 2y - 2 = 0$, 所以 $C(2 - 2y_1, y_1)$,

$$\text{因为 } l_{BN}: y = \frac{y_2 - 1}{x_2}x + 1, \text{ 令 } y = y_1 \text{ 可得: } x_D = \frac{(y_1 - 1)x_2}{y_2 - 1}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $x_2 = 0$ 时, l_{BN} : $x = 0$, 此时点 M 坐标为 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$, 点 C 坐标为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$,

满足 $x_1 + x_D = 2x_C$;

当 $x_2 \neq 0$ 时, 因为 l_{BN} : $y = \frac{y_2 - 1}{x_2}x + 1 (x_2 \neq 0)$,

$$\text{令 } y = y_1 \text{ 可得: } x_D = \frac{(y_1 - 1)x_2}{y_2 - 1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

下面证明: $x_1 + x_D = 2x_C$, 8 分

$$\text{即证: } x_1 + \frac{(y_1 - 1)x_2}{y_2 - 1} = 4 - 4y_1, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{即证: } (my_1 + n)(y_2 - 1) + (y_1 - 1)x_2 = (4 - 4y_1)(y_2 - 1),$$

$$\text{整理可得即证: } (2m + 4)y_1y_2 + (n - m - 4)(y_1 + y_2) - 2n + 4 = 0, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即证: } (2m + 4) \cdot \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4} + (n - m - 4) \cdot \frac{-2mn}{m^2 + 4} - 2n + 4 = 0,$$

$$\text{整理可得即证: } 4m^2 + 8mn + 4n^2 - 8(m + n) = 0, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{即证: } (m + n)^2 - 2(m + n) = 0,$$

因为 $m + n = 2$, 所以上式成立, 原式得证. 12 分

解法 3: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) (y_1 \neq 1, y_2 \neq 1)$, 因为 $MD \parallel x$ 轴,

所以 $D(x_D, y_1), C(x_C, y_1)$, 5 分

设直线 l_{MN} : $mx + n(y - 1) = 1$, 因为直线 l_{MN} 过点 $P(2,1)$,

$$\text{所以 } 2m = 1, m = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由方程组} \begin{cases} mx + n(y - 1) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \text{ 可得:}$$

$$\text{当 } y \neq 1 \text{ 时, } \left(\frac{x}{y - 1} \right)^2 + 8m \cdot \frac{x}{y - 1} + 4 + 8n = 0, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{x_1}{y_1 - 1} + \frac{x_2}{y_2 - 1} = -8m = -4, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } B, D, N \text{ 三点共线, 所以 } \frac{x_2}{y_2 - 1} = \frac{x_D}{y_1 - 1}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{x_1}{y_1 - 1} + \frac{x_D}{y_1 - 1} = -4, \text{ 即 } x_1 + x_D = -4(y_1 - 1), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为点 $C(x_C, y_1)$ 在直线 $AB: \frac{x}{2} + y = 1$ 上,

所以 $y_1 - 1 = -\frac{x_C}{2}$, 11 分

$x_1 + x_D = -4 \times (-\frac{x_C}{2})$, 即 $x_1 + x_D = 2x_C$,

所以 M, C, D 三点的横坐标成等差数列. 12 分

解法 4: 设直线 $MN: x = my + n$, 因为直线过点 $P(2, 1)$, 所以 $m + n = 2$, 5 分

联立方程组 $\begin{cases} x = my + n \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 可得: $(m^2 + 4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0$, 6 分

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ ($y_1 \neq 1, y_2 \neq 1$),

则: $y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}$, 8 分

所以 $\frac{x_1}{y_1 - 1} + \frac{x_2}{y_2 - 1} = \frac{x_1(y_2 - 1) + x_2(y_1 - 1)}{(y_1 - 1)(y_2 - 1)} = \frac{-8(m + n)}{(m + n)^2} = -4$, 9 分

又 B, D, N 三点共线,

所以 $\frac{x_2}{y_2 - 1} = \frac{x_D}{y_1 - 1}$, 即 $\frac{x_1}{y_1 - 1} + \frac{x_D}{y_1 - 1} = -4 = \frac{2}{k_{AB}} = 2 \cdot \frac{x_C}{y_1 - 1}$, 11 分

所以 $x_1 + x_D = 2x_C$, 所以 M, C, D 三点的横坐标成等差数列. 12 分

21. 解: (I) 因为 $F(x) = (x - 1)e^{x-1}$, 所以 $F'(x) = xe^{x-1}$, 1 分

由 $F'(x) > 0$ 得 $x > 0$, 2 分

所以 $F(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调的递增区间为 $(0, +\infty)$; 4 分

(II) 因为 $f(x) = e^{x-1}$, 所以 $f'(x) = e^{x-1}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 (m, e^{m-1}) 处的切线方程为: $y = e^{m-1}x + (1 - m)e^{m-1}$, 5 分

因为 $g(x) = \ln x + b$, 所以 $g'(x) = \frac{1}{x}$,

所以曲线 $y = g(x)$ 在点 $(n, \ln n + b)$ 处的切线方程为: $y = \frac{1}{n}x + \ln n + b - 1$, 6 分

令 $\begin{cases} e^{m-1} = \frac{1}{n} \\ (1 - m)e^{m-1} = \ln n + b - 1 \end{cases}$, 则 $(m - 1)e^{m-1} - m + b = 0$, 7 分

令 $h(m) = (m - 1)e^{m-1} - m + b$, 则 $h'(m) = me^{m-1} - 1$, $h''(m) = (m + 1)e^{m-1}$, 8 分

所以当 $m < -1$ 时, $h'(m)$ 单减, 且 $h'(m) < 0$,

又 $h'(1) = 0$, $m < 1$ 时, $h'(m) < 0$,

所以当 $m < 1$ 时, $h(m)$ 单调递减, 当 $m > 1$ 时, $h(m)$ 单调递增, 9 分

若总存在两条直线和曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 都相切, 则曲线 $y = h(x)$ 与 x 轴恒有两个不同的交点, 则 $h(1) = -1 + b < 0$, 即 $b < 1$, 10 分

此时 $h(b - 1) = (b - 2)e^{b-2} + 1 > -\frac{1}{e} + 1 > 0$,

$h(3 - b) = (2 - b)e^{2-b} + 2b - 3 > (2 - b)(3 - b) + 2b - 3 = (b - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, 11 分

所以 b 的取值范围是 $(-\infty, 1)$ 12 分

22. 解：(I) 由 $\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ 消 θ 得 $(x-1)^2+y^2=1$ ，即 $x^2+y^2-2x=0$ ，.....1 分

将 $\rho\cos\theta=x$ ， $\rho\sin\theta=y$ ， $\rho^2=x^2+y^2$ 分别代入 C_1 ， C_2 得：

C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$ ，.....3 分

C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta=1$ ；.....5 分

(II) 设直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$ ， $\rho\in\mathbf{R}$ ， $\alpha\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ ，.....6 分

联立方程可得 $\rho_A=2\cos\alpha$ ， $\rho_B=\frac{1}{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}$ ，.....7 分

所以 $|OA|+\frac{1}{|OB|}=2\cos\alpha+\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$

$=3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\sqrt{3}\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$ ，.....8 分

又 $\alpha\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ ，则有 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$ ，.....9 分

即 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\in[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$ ，

综上 $|OA|+\frac{1}{|OB|}$ 的取值范围为 $[3,2\sqrt{3}]$ 。.....10 分

23. 解：(I) 当 $x<-2$ 时， $f(x)\leq 6-x$ 即 $-2x+2-x-2\leq 6-x$ ，

解得 $x\geq -3$ ，故 $-3\leq x<-2$ ；.....1 分

当 $-2\leq x\leq 1$ 时， $f(x)\leq 6-x$ 即 $-2x+2+x+2\leq 6-x$ ，

所以 $4\leq 6$ ，则 $-2\leq x\leq 1$ ；.....2 分

当 $x>1$ 时， $f(x)\leq 6-x$ 即 $2x-2+x+2\leq 6-x$ ，

解得 $x\leq \frac{3}{2}$ ，故 $1<x\leq \frac{3}{2}$ ，.....3 分

综上所述，原不等式的解集为 $\{x|-3\leq x\leq \frac{3}{2}\}$ ；.....5 分

(II) 若 $x<-2$ ，则 $f(x)=-3x>6$ ；

若 $-2\leq x\leq 1$ ，则 $f(x)=-x+4\geq 3$ ；

若 $x>1$ ，则 $f(x)=3x>3$ ，

所以函数 $f(x)$ 的最小值 $T=3$ ，故 $a+b+c=3$ ，.....6 分

又 a, b, c 为正数，

则 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c})\times 3=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c})(a+b+c)$7 分

$=6+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{4b}{c}$8 分

$\geq 6+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{4b}{c}}=16$ ，.....9 分

当且仅当 $a=b=\frac{3}{4}$ ， $c=\frac{3}{2}$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geq \frac{16}{3}$ 。.....10 分