

第三次教学质量诊断性考试

数 学 (理科) 参考答案及评分意见

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	C	C	A	A	B	B	B	D	C

二、填空题：

13. 2;

14. $\frac{p}{3}$;

15. 8;

16. 17.

三、解答题：

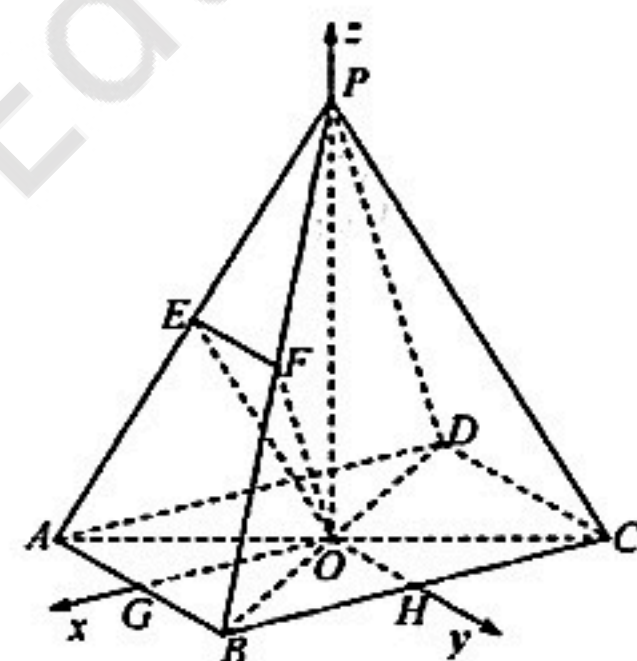
17. 解：(I) 因为底面 $ABCD$ 是矩形， AC 与 BD 交于点 O ,所以 O 为 AC 中点，..... 1 分点 E 是棱 PA 的中点， F 是棱 PB 的中点，所以 OE 为 $\triangle ACP$ 的中位线， OF 为 $\triangle BDP$ 的中位线，所以 $OE \parallel CP$ ， $OF \parallel DP$ ，..... 2 分因为 $OE \not\subset$ 平面 DCP ， $PC \subset$ 平面 DCP ，所以 $OE \parallel$ 平面 DCP ，..... 3 分因为 $OF \not\subset$ 平面 DCP ， $DP \subset$ 平面 DCP ，所以 $OF \parallel$ 平面 DCP ，..... 4 分而 $OE \cap OF = O$ ， $OE \subset$ 平面 OEF ， $OF \subset$ 平面 OEF ，所以平面 $OEF \parallel$ 平面 PCD ；..... 5 分(II) 解法一：分别取 AB ， BC 中点 G 、 H ，以 OG ， OH ， OP 所在直线为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系，则点 $B(\sqrt{3}, 1, 0)$ ，点 $A(\sqrt{3}, -1, 0)$ ，点 $P(0, 0, 2\sqrt{3})$ ，点 $E(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ ，点 $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{OE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{OF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$ ，..... 6 分设平面 OEF 的法向量为 $m = (x, y, z)$ ，则：

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3}z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } m = (2, 0, -1), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

 $\overrightarrow{PA} = (\sqrt{3}, -1, -2\sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{3})$ ，设平面 PAB 的法向量为 $n = (x, y, z)$ ，则：

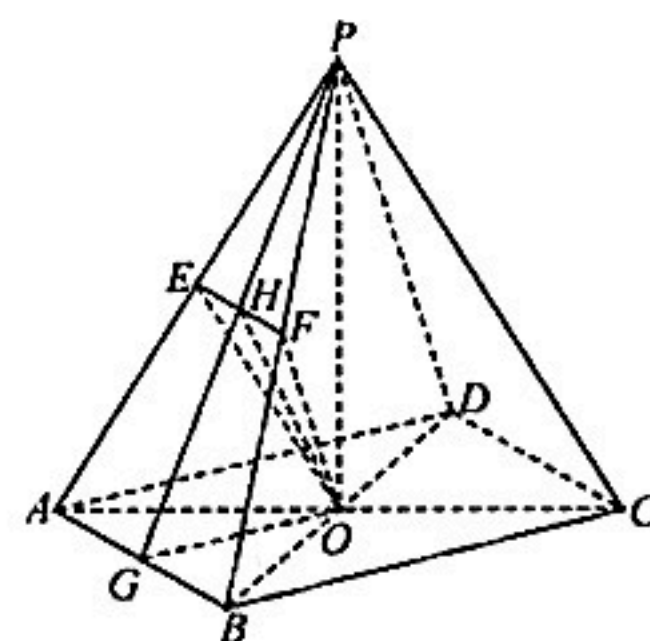
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } n = (2, 0, 1), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{2 \times 2 - 1 \times 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5},$$

二面角 $A-EF-O$ 的余弦值为 $\frac{3}{5}$ 。..... 12 分

解法二：取 AB 中点 G ，连接 PG 交 EF 于点 H ，连接 OH ， OG ，
 因为 $PA=PB$ ，所以 $PG \perp AB$ ，即 $PH \perp EF$ ，· 6 分
 因为 $OE = \frac{1}{2}PA$ ， $OF = \frac{1}{2}PB$ ，所以 $OE=OF$ ，· 7 分
 所以 $OH \perp EF$ ，

$\angle OHG$ 是二面角 $A-EF-O$ 的平面角，····· 8 分
 因为 $OP=2\sqrt{3}$ ， $OG=\sqrt{3}$ ，所以 $PG=\sqrt{15}$ ，·· 9 分
 所以 $OH=\frac{\sqrt{15}}{2}$ ，····· 10 分



$$\text{在 } \triangle OHG \text{ 中, } \cos \angle OHG = \frac{(\frac{\sqrt{15}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{15}}{2})^2 - 3}{2 \times \frac{\sqrt{15}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{3}{5},$$

所以二面角 $A-EF-O$ 的余弦值为 $\frac{3}{5}$ 。····· 12 分

18. 解：(I) 由题意， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 6\sqrt{3}$ ，····· 1 分

所以 $bc \sin A = 12\sqrt{3}$ ，····· 2 分

$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，有：

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \sin A}{2bc \sin A} = \frac{48 \sin A}{24\sqrt{3}}, \text{····· 5 分}$$

$$\cos A \neq 0, \text{ 所以 } \tan A = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{····· 6 分}$$

(II) 在 $\triangle ABC$ 中，由 (I) 知： $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，····· 8 分

$$\text{则 } \sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos A = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{····· 9 分}$$

$$\text{因为 } \cos C = \frac{\sqrt{7}}{14}, \text{ 所以 } \sin C = \frac{3\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{所以 } \sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{14} + \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{····· 10 分}$$

$$\text{由正弦定理, 有 } \frac{c}{\frac{3\sqrt{21}}{14}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \text{ 所以 } \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$\text{又 } bc \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = 12\sqrt{3}, \text{ 所以 } bc = 12\sqrt{7}, \text{····· 11 分}$$

$$\text{解得: } b = 2\sqrt{7}, c = 6,$$

$$\text{所以 } BD = \sqrt{6^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7}} = \sqrt{19}. \text{····· 12 分}$$

19. 解：(I) 由频率分布直方图可知，

A 种型号的新能源汽车评估综合得分不低于 80 分的概率为：

$$0.010 \times 20 = 0.2, \text{····· 1 分}$$

B 种型号的新能源汽车评估综合得分不低于 80 分的概率为：

$$0.005 \times 20 = 0.1, \text{····· 2 分}$$

所以 X 的所有可能值为 0, 1, 2,

$$\text{所以 } P(X=0) = 0.8 \times 0.9 = 0.72, \text{····· 3 分}$$

$$P(X=1) = 0.2 \times 0.9 + 0.8 \times 0.1 = 0.26, \text{····· 4 分}$$

$$P(X=2)=0.2 \times 0.1=0.02, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	0.72	0.26	0.02

$$\text{故 } X \text{ 的数学期望 } E(X)=0 \times 0.72+1 \times 0.26+2 \times 0.02=0.3; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 相关系数为：

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \hat{b} \frac{\sqrt{ns_x^2}}{\sqrt{ns_y^2}} = \hat{b} \frac{\sqrt{s_x^2}}{\sqrt{s_y^2}}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } r = 4.7 \times \sqrt{\frac{2}{50}} = 4.7 \times \frac{1}{5} = 0.94 > 0.75, \text{ 故 } y \text{ 与 } x \text{ 线性相关很强.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解：(I) 依据题意，直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，即 $bx + ay - ab = 0$ ， $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \\ \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \text{ 解得：} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1; \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 解法 1: M, C, D 三点的横坐标成等差数列，理由如下：

由题意知，直线 MN 的斜率存在且不为 0，直线过点 $P(2,1)$ ，

所以设直线 MN ： $y-1=k(x-2)$ ， $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y-1=k(x-2) \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \text{ 可得： } (1+4k^2)x^2+8k(1-2k)x+16k^2-16k=0,$$

$$\Delta = [8k(1-2k)]^2 - 4(1+4k^2)(16k^2-16k) = 64k > 0,$$

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则： } x_1 + x_2 = \frac{16k^2 - 8k}{1+4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{16k^2 - 16k}{1+4k^2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为 l_{AB} ： $x+2y-2=0$ ，所以 $C(2-2y_1, y_1)$ ，

当 $x_2=0$ 时， l_{BN} ： $x=0$ ，此时点 M 坐标为 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ ，点 C 坐标为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ，

满足 $x_1 + x_D = 2x_C$ ；

当 $x_2 \neq 0$ 时，因为 l_{BN} ： $y = \frac{y_2-1}{x_2}x+1$ ，

$$\text{令 } y=y_1 \text{ 可得： } x_D = \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } l_{BN} \text{： } y = \frac{y_2-1}{x_2}x+1, \text{ 令 } y=y_1 \text{ 可得： } x_D = \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

下面证明： $x_1 + x_D = 2x_C$, 8 分

即证： $x_1 + \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1} = 4-4y_1$, 即证：

$x_1(y_2-1) + (y_1-1)x_2 = (4-4y_1)(y_2-1)$, 9 分

整理可得即证： $(8k^2+2k)(x_1+x_2) - (4k^2+2k)x_1x_2 = 16k^2$, (*) 10 分

由于 $(8k^2+2k)(x_1+x_2) - (4k^2+2k)x_1x_2$,

$= (8k^2+2k)\left(\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}\right) - (4k^2+2k) \cdot \frac{16k^2-16k}{1+4k^2}$ 11 分

$= \frac{64k^4+16k^2}{1+4k^2} = 16k^2$,

所以上式(*)成立, 原式得证. 12 分

解法 2: M, C, D 三点的横坐标成等差数列, 理由如下:

设直线 MN : $x = my + n$, 因为直线过点 $P(2,1)$, 所以 $m+n=2$,

联立方程组 $\begin{cases} x = my + n \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 可得: $(m^2+4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0$,

$\Delta = 4m^2n^2 - 4(m^2+4)(n^2-4) = 16(m^2-n^2+4) > 0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则: $y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2+4}$, $y_1y_2 = \frac{n^2-4}{m^2+4}$, 5 分

因为 l_{AB} : $x+2y-2=0$, 所以 $C(2-2y_1, y_1)$,

因为 l_{BN} : $y = \frac{y_2-1}{x_2}x + 1$, 令 $y = y_1$ 可得: $x_D = \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1}$, 6 分

当 $x_2 = 0$ 时, l_{BN} : $x = 0$, 此时点 M 坐标为 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$, 点 C 坐标为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$,

满足 $x_1 + x_D = 2x_C$;

当 $x_2 \neq 0$ 时, 因为 l_{BN} : $y = \frac{y_2-1}{x_2}x + 1 (x_2 \neq 0)$,

令 $y = y_1$ 可得: $x_D = \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1}$, 7 分

下面证明: $x_1 + x_D = 2x_C$, 8 分

即证: $x_1 + \frac{(y_1-1)x_2}{y_2-1} = 4-4y_1$, 9 分

即证: $(my_1+n)(y_2-1) + (y_1-1)x_2 = (4-4y_1)(y_2-1)$,

整理可得即证: $(2m+4)y_1y_2 + (n-m-4)(y_1+y_2) - 2n+4 = 0$, 10 分

即证: $(2m+4) \cdot \frac{n^2-4}{m^2+4} + (n-m-4) \cdot \frac{-2mn}{m^2+4} - 2n+4 = 0$,

整理可得即证: $4m^2+8mn+4n^2-8(m+n)=0$, 11 分

即证: $(m+n)^2 - 2(m+n) = 0$,

因为 $m+n=2$, 所以上式成立, 原式得证. 12 分

解法 3: M, C, D 三点的横坐标成等差数列, 理由如下:

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2) (y_1 \neq 1, y_2 \neq 1)$, 因为 $MD \parallel x$ 轴,

所以 $D(x_D, y_1)$, $C(x_C, y_1)$, 5 分

设直线 l_{MN} : $mx + n(y-1) = 1$, 因为直线 l_{MN} 过点 $P(2,1)$,

所以 $2m=1$, $m = \frac{1}{2}$, 6 分

由方程组 $\begin{cases} mx + n(y-1) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 可得:

当 $y \neq 1$ 时, $(\frac{x}{y-1})^2 + 8m \cdot \frac{x}{y-1} + 4 + 8n = 0$, 7 分

$$\text{所以 } \frac{x_1}{y_1-1} + \frac{x_2}{y_2-1} = -8m = -4, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } B, D, N \text{ 三点共线, 所以 } \frac{x_2}{y_2-1} = \frac{x_D}{y_1-1}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{x_1}{y_1-1} + \frac{x_D}{y_1-1} = -4, \text{ 即 } x_1 + x_D = -4(y_1-1), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为点 } C(x_C, y_1) \text{ 在直线 } AB: \frac{x}{2} + y = 1 \text{ 上,}$$

$$\text{所以 } y_1 - 1 = -\frac{x_C}{2}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$x_1 + x_D = -4 \times (-\frac{x_C}{2}), \text{ 即 } x_1 + x_D = 2x_C,$$

$$\text{所以 } M, C, D \text{ 三点的横坐标成等差数列.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法 4: M, C, D 三点的横坐标成等差数列, 理由如下:

$$\text{设直线 } MN: x = my + n, \text{ 因为直线过点 } P(2, 1), \text{ 所以 } m + n = 2, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x = my + n \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \text{ 可得: } (m^2 + 4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) (y_1 \neq 1, y_2 \neq 1),$$

$$\text{则: } y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{x_1}{y_1-1} + \frac{x_2}{y_2-1} = \frac{x_1(y_2-1) + x_2(y_1-1)}{(y_1-1)(y_2-1)} = \frac{-8(m+n)}{(m+n)^2} = -4, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

又 B, D, N 三点共线,

$$\text{所以 } \frac{x_2}{y_2-1} = \frac{x_D}{y_1-1}, \text{ 即 } \frac{x_1}{y_1-1} + \frac{x_D}{y_1-1} = -4 = \frac{2}{k_{AB}} = 2 \cdot \frac{x_C}{y_1-1}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } x_1 + x_D = 2x_C, \text{ 所以 } M, C, D \text{ 三点的横坐标成等差数列.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解: (I) 因为 } f'(x) = ae^x(x+1), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

由 $f'(x) > 0$ 得 $x > -1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调,

$$f(-1) = -\frac{a}{e} - 1, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -1$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以函数 $f(x)$ 有唯一零点; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上存在唯一零点, 且 } ax_0 e^{x_0} - 1 = 0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(1) 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f(x) < 0$,

$$\text{由 } |f(x)| > x + x \ln x \text{ 得: } -axe^x + 1 > x + x \ln x, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{即 } -ae^x + \frac{1}{x} - 1 - \ln x > 0, \text{ 设 } g(x) = -ae^x + \frac{1}{x} - 1 - \ln x,$$

$$\text{则 } g'(x) = -ae^x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$g(x) \text{ 在 } (0, x_0) \text{ 上单调, 所以 } g(x) > g(x_0) = -ae^{x_0} + \frac{1}{x_0} - 1 - \ln x_0 = -1 - \ln x_0 \geq 0,$$

$$\text{解得 } 0 > x_0 \leq \frac{1}{e}; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 当 } x \in [x_0, +\infty) \text{ 时, 由 } |f(x)| > x + x \ln x \text{ 得: } axe^x - 1 > x + x \ln x,$$

$$\text{即 } ae^x - \frac{1}{x} - 1 - \ln x > 0,$$

$$\text{设 } h(x) = ae^x - \frac{1}{x} - 1 - \ln x, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{则 } h'(x) = ae^x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \text{ 因为 } axe^x - 1 > 0, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以 $h'(x) > 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上单增，

所以 $h(x) \geq h(x_0) = ae^{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 - \ln x_0 = -1 - \ln x_0 > 0$ ，

解得 $0 < x_0 < \frac{1}{e}$ ； 11 分

综上知： x_0 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$ 。 12 分

22. 解：(I) 由 $\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ 消 θ 得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ，即 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ， 1 分

将 $\rho\cos\theta = x$ ， $\rho\sin\theta = y$ ， $\rho^2 = x^2 + y^2$ 分别代入 C_1 ， C_2 得：

C_1 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$ ， 3 分

C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta = 1$ ； 5 分

(II) 设直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ， $\rho \in \mathbf{R}$ ， $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ ， 6 分

联立方程可得 $\rho_A = 2\cos\alpha$ ， $\rho_B = \frac{1}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}$ ， 7 分

所以 $|OA| + \frac{1}{|OB|} = 2\cos\alpha + \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$

$= 3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\sqrt{3}\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$ ， 8 分

又 $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ ，则有 $\alpha + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ ， 9 分

即 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ ，

综上 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$ 的取值范围为 $[3, 2\sqrt{3}]$ 。 10 分

23. 解：(I) 当 $x < -2$ 时， $f(x) \leq 6 - x$ 即 $-2x + 2 - x - 2 \leq 6 - x$ ，

解得 $x \geq -3$ ，故 $-3 \leq x < -2$ ； 1 分

当 $-2 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) \leq 6 - x$ 即 $-2x + 2 + x + 2 \leq 6 - x$ ，

所以 $4 \leq 6$ ，则 $-2 \leq x \leq 1$ ； 2 分

当 $x > 1$ 时， $f(x) \leq 6 - x$ 即 $2x - 2 + x + 2 \leq 6 - x$ ，

解得 $x \leq \frac{3}{2}$ ，故 $1 < x \leq \frac{3}{2}$ ， 3 分

综上所述，原不等式的解集为 $\{x | -3 \leq x \leq \frac{3}{2}\}$ ； 5 分

(II) 若 $x < -2$ ，则 $f(x) = -3x > 6$ ；

若 $-2 \leq x \leq 1$ ，则 $f(x) = -x + 4 \geq 3$ ；

若 $x > 1$ ，则 $f(x) = 3x > 3$ ，

所以函数 $f(x)$ 的最小值 $T = 3$ ，故 $a + b + c = 3$ ， 6 分

又 a, b, c 正数，

则 $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c}) \times 3 = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c})(a + b + c)$ 7 分

$= 6 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{4b}{c}$ 8 分

$\geq 6 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{4b}{c}} = 16$ ， 9 分

当且仅当 $a = b = \frac{3}{4}$ ， $c = \frac{3}{2}$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{3}$ 。 10 分