

德阳市高中 2021 级“三诊”考试

数 学 试 卷(文史类)

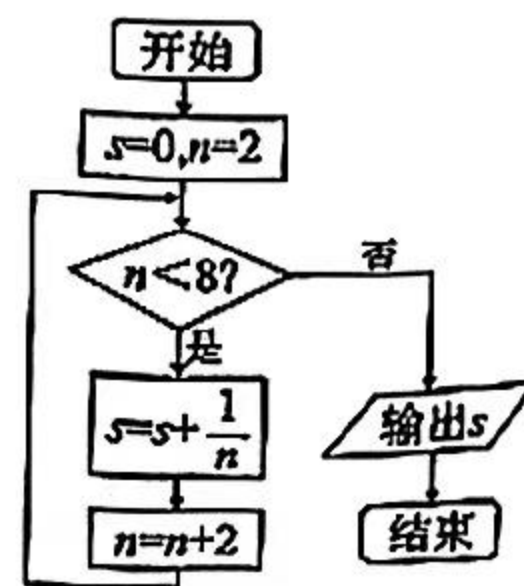
说明:

1. 本试卷分第 I 卷和第 II 卷,共 4 页. 考生作答时,须将答案答在答题卡上,在本试卷、草稿纸上答题无效. 考试结束后,将答题卡交回.
2. 本试卷满分 150 分,120 分钟完卷.

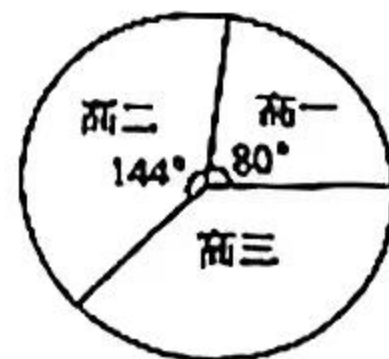
第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

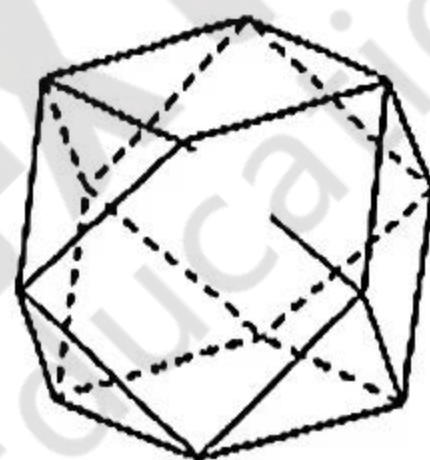
1. 已知集合 $A = \{x \mid 1 < x < 2024\}$, $B = \{x \mid x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是
A. $(2024, +\infty)$ B. $[2024, +\infty)$ C. $(-\infty, 2024]$ D. $(-\infty, 2024)$
2. 欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 把自然对数的底数 e , 虚数单位 i , $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 联系在一起, 充分体现了数学的和谐美, 被誉为“数学中的天桥”, 若复数 z 满足 $(e^{i\pi} + i) \cdot z = i + 1$, 则正确的是
A. z 的共轭复数为 $-i$ B. z 的实部为 1
C. z 的虚部为 i D. z 的模为 1
3. 已知 $f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 2x - 5$, 且 $f(a) = 3$, 则 $a =$
A. 3 B. $\frac{7}{4}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$
4. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$, 且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}f(x_0)$, 则 $\tan 2x_0 =$
A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$
5. 执行右面的程序框图, 输出的 $S =$
A. $\frac{11}{12}$ B. $\frac{25}{24}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{6}$
6. 已知向量 $\vec{OA} = (1, 0)$, $\vec{OB} = (1, 1)$, O 为坐标原点, 动点 $P(x, y)$ 满足约束条件 $\begin{cases} 0 \leq \vec{OP} \cdot \vec{OA} \leq 1 \\ 0 \leq \vec{OP} \cdot \vec{OB} \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = x - 2y$ 的最大值为
A. -2 B. 2 C. -3 D. 3



7. 2023年7月28日至8月8日,第31届世界夏季大学生运动会在成都市举行,某校在“大运会”举行前夕,在全校学生中进行“我和‘大运会’”的征文活动,对收到的稿件进行分类统计,得到如图所示的扇形统计图.已知全校高二年级共交稿360份,则全校高三年级的交稿数为



- A. 320 份 B. 330 份 C. 340 份 D. 350 份
8. 设 α, β, γ 为不同的平面, m, n, l 为不同的直线, 则 $m \perp \beta$ 的一个充分条件为
- A. $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m \perp l$ B. $\alpha \cap \gamma = m, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$
- C. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, m \perp \alpha$ D. $n \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp \alpha$
9. 如今我国物流行业蓬勃发展,极大地促进了社会经济发展和资源整合. 已知某类果蔬的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $y = e^{ax+b}$ (a, b 为常数), 若该果蔬在 7°C 的保鲜时间为 288 小时, 在 21°C 的保鲜时间为 32 小时, 且该果蔬所需物流时间为 4 天, 则物流过程中果蔬的储藏温度 (假设物流过程中恒温) 最高不能超过
- A. 14°C B. 15°C C. 13°C D. 16°C
10. “阿基米德多面体”也称半正多面体,是由边数不全相同的正多边形围成的多面体,它体现了数学的对称美. 如图是以正方体的各条棱的中点为顶点的多面体,这是一个有八个面为正三角形,六个面为正方形的“阿基米德多面体”,若该多面体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则该多面体外接球的表面积为
- A. 8π B. 4π C. 2π D. $\frac{4}{3}\pi$
11. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, O 是坐标原点, 点 P 是 C 上异于实轴端点的任意一点, 若 $|PF_1| \cdot |PF_2| - |OP|^2 = 2a^2$, 则 C 的离心率为
- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. 2
12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 在定义域均为 $\mathbb{R}$ 且 $F(x) = e^{x+2} f(x+2)$ 是偶函数, $(x-2)[f'(x) + f(x)] > 0$, 则不等式 $xf(\ln x) < e^3 f(3)$ 的解集为
- A. $(0, e^3)$ B. $(1, e^3)$ C. (e, e^3) D. $(e^3, +\infty)$



第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第 13 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.将答案填在答题卡上.

13. 已知函数 $f(x) = \cos(x + \theta)$ 是奇函数,则 θ 的最小正值为 _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $C = \frac{\pi}{3}$, 若向量 $m = (c-4, a-b)$,

$n = (a-b, c+4)$ 满足 $m \parallel n$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

15. 已知两点 $M(-1, 0)$, $N(1, 0)$, 若直线 $x - y + m = 0$ 上存在唯一点 P 满足 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 则实数 m 的值为 _____.

16. 已知 F 为抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点, 过点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与抛物线 C 相交于不同的两点 A, B , 若抛物线 C 在 A, B 两点处的切线相交于点 P , 则 $|PF| =$ _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2a_1 = b_1 = 2$, $a_5 = 5(a_4 - a_3)$, 在 ① $b_5 = 4(b_4 - b_3)$, ② $b_{n+1} = S_n + 2$ 这两个条件中任选其中一个, 完成下面问题的解答.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

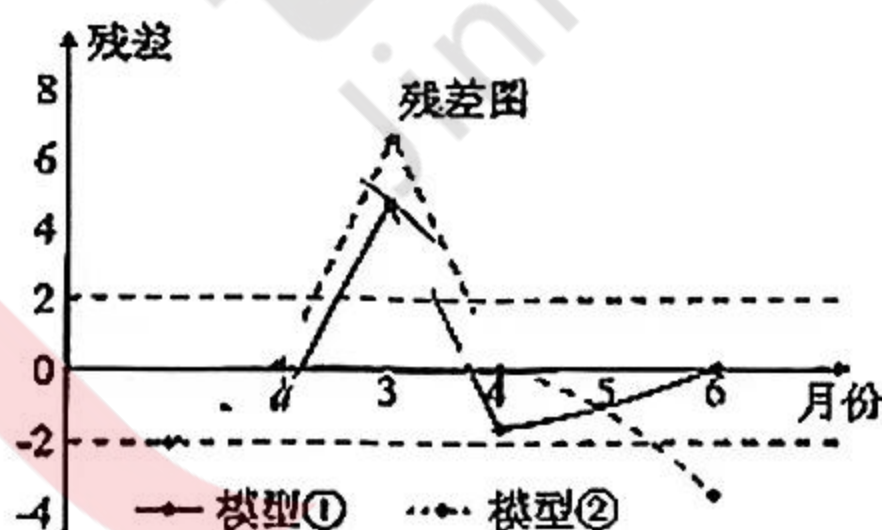
18. (本题满分 12 分)

某公司为了确定下季度的前期广告投入计划, 收集并整理了近 6 个月广告投入量 x (单位: 万元) 和收益 y (单位: 万元) 的数据如表 (其中有些数据污损不清):

月份	1	2	3	4	5	6
广告投入量	2		7	8	10	
收益		20	30	34	37	

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^6 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^6 x_i^2$
7	30	1470	370

他们分别用两种模型 ① $y = bx + a$, ② $y = ae^{bx}$ 进行拟合, 得到相应的回归方程并进行残差分析, 得到如图所示的残差图及一些统计量的值.



(1) 根据残差图, 比较模型 ①, ② 的拟合效果, 应选择哪个模型?

(2) 残差绝对值大于 2 的数据被认为是异常数据, 需要剔除.

(i) 剔除异常数据后, 求出 (1) 中所选模型的回归方程;

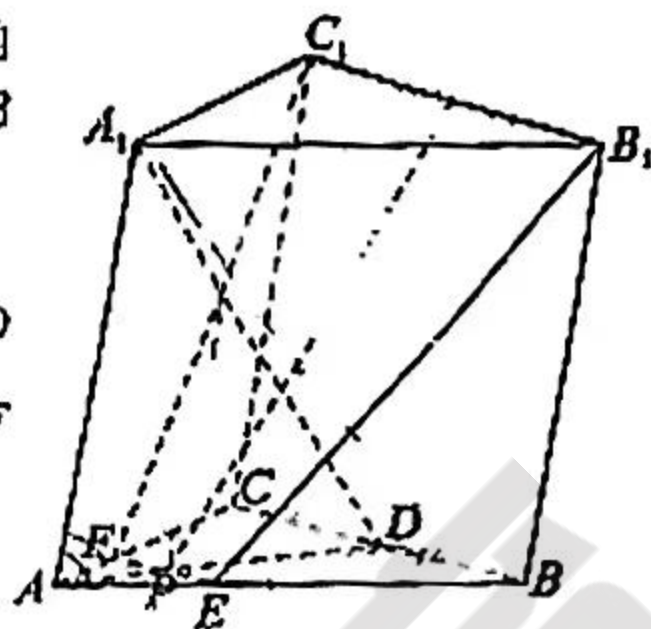
(ii) 若广告投入量 $x = 19$, 则 (1) 中所选模型收益的预报值是多少万元? (精确到 0.01)

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = bx + \hat{a}$ 的斜率和截距

$$\text{的最小二乘估计分别为: } b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x}.$$

19. (本题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,底面 ABC 是等边三角形, $\angle A_1AB = \frac{\pi}{3}$, AC , D 为 BC 的中点,过 B_1, C_1 的平面交棱 AB 于 E ,交 AC 于 F .



(1) 求证:平面 $A_1AD \perp$ 平面 EB_1C_1F ;

(2) 设 M 为 B_1C_1 的中点,平面 EB_1C_1F 交 AD 于 P ,且 $PD = 2PA$. 若 $PM = AB = 6$,且 $\angle MPD = \frac{\pi}{3}$,求四棱锥 $B - EB_1C_1F$ 的体积.

20. (本题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,其左右焦点分别为 F_1, F_2 ,下顶点为

A ,右顶点为 B , $\triangle ABF_1$ 的面积为 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设不过原点 O 的直线交 C 于 M, N 两点,且直线 OM, MN, ON 的斜率依次成等比数列,求 $\triangle MON$ 面积的取值范围.

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x - x^2 - 1$.

(1) 试研究函数 $f(x)$ 的极值点;

(2) 若 $F(x) = f(x) + 4ax$ 恰有一个零点,求证: $0 < a < \frac{3}{4}$.

请考生在 22、23 二题中任选一题作答. 注意:只能做所选定的题目. 如果多做,则按所做第一个题目计分,作答时,请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} + 2 \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数),直线 l 的方程为

$x - y - 1 = 0$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的极坐标方程;

(2) 点 P 的极坐标为 $(1, \frac{3\pi}{2})$, 设直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B 两点,若线段 AB 的中点为 D ,求线段 PD 的长.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本题满分 10 分)

已知 a, b, c, d 均为正数,且 $ad = bc$.

(1) 证明:若 $a + d > b + c$,则 $|a - d| > |b - c|$;

(2) 若 $t \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^4 + c^4} + \sqrt{b^4 + d^4}$,求实数 t 的取值范围.