成都石室中学 2023-2024 年度下期高 2024 届三诊模拟

数学试题（理）

（总分：150 分，时间：120 分钟 ）

第Ⅰ卷（共 60 分）

一、选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分）

1．满足 $M \subseteq \{a,b,c,d\}$ 且 $M \cap \{a,b,c\}=\{a\}$ 的集合 M 的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．在 ΔABC 中，“$\angle ACB$ 是钝角”是“$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|<\left|\overrightarrow{AB}\right|$”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

3．如图是某赛季甲、乙两名篮球运动员 5 场比赛得分的茎叶图，已知甲的成绩的极差为 31，乙的成绩的平均值为 24，则下列结论错误的是（　）

甲		乙
8	0	
3	1	2
8	2	5 6 y
x 2	3	1

A．$x=9$　　B．$y=6$

C．乙的成绩的中位数为28　　D．乙的成绩的方差小于甲的成绩的方差

4.用数学归纳法证明 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{n+2}{2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）的过程中，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，$f(k+1)$ 比 $f(k)$ 共增加了（　　）

A．1 项　　B．2^k-1 项　　C．2^{k+1} 项　　D．2^k 项

5．已知函数 $f(x)=\left|\sin x\cos x+\frac{1}{4}\right|$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称　　B．$f(x)$ 的周期为 π

C．$(\pi,\frac{1}{4})$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心　　D．$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

6．物理学家本·福特提出的定律：在 b 进制的大量随机数据中，以 n 开头的数出现的概率为 $P_b(n)=\log_b\frac{n+1}{n}$. 应用此定律可以检测某些经济数据、选举数据是否存在造假或错误.若 $\sum_{n=k}^{80}P_{10}(n)=\frac{\log_4 81}{1+\log_2 5}\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，则 k 的值为（　　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

7．已知函数 $f(x)=x^2+2\ln x$ 的图象在两个不同点 $A\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 与 $B\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ 处的切线相互平行，则 x_1+x_2 的取值可以为（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．1　　C．2　　D．$\frac{10}{3}$

8.佩香囊是端午节传统习俗之一，香囊内通常填充一些中草药，有清香、驱虫、开窍的功效.因地方习俗的差异，香囊常用丝布做成各种不同的形状，形形色色，玲珑夺目.图 1 的▱$ABCD$ 由六个正三角形构成，将它沿虚线折起来，可得图 2 所示的六面体形状的香囊，那么在图 2 这个六面体中，棱 AB 与 CD 所在直线的位置关系为（　　）

图 1


图 2

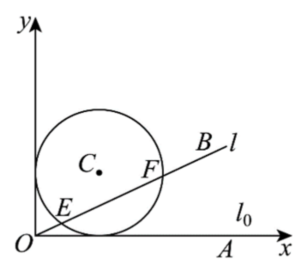
A．平行　　B．相交　　C．异面且垂直　　D．异面且不垂直

9．甲、乙两艘轮船都要在某个泊位停靠 6 小时，假定它们在一昼夜的时间段中随机地到达，则这两艘船中至少有一艘在停靠泊位时必须等待的概率为（ ）

A．$\frac{3}{16}$　　B．$\frac{13}{16}$　　C．$\frac{7}{16}$　　D．$\frac{9}{16}$

10．　在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-1,0),B(2,3)$，向量 $\overline{OC}=m\overline{OA}+n\overline{OB}$，且 $m-n-4=0$.若点 C 的轨迹与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的渐近线相交于两点 P 和 Q（点 P 在 x 轴上方），双曲线右焦点为 F，则 $\frac{S_{\Delta POF}}{S_{\Delta QOF}}=$（　　）

A．$3+2\sqrt{2}$　　B．$3-2\sqrt{2}$　　C．$\frac{19+6\sqrt{2}}{17}$　　D．$\frac{19-6\sqrt{2}}{17}$



11．如图，射线 l 与圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，当射线 l 从 l_0 开始在平面上按逆时针方向绕着原点 O 匀速旋转（A 、B 分别为 l_0 和 l 上的点，转动角度 $\alpha=\angle AOB$ 不超过 $\frac{\pi}{4}$）时，它被圆 C 截得的线段 EF 长度为 $L(\alpha)$，则其导函数 $L'(\alpha)$ 的解析式为（　　）

A．$L'(\alpha)=2\sqrt{\sin 2\alpha}$　　B．$L'(\alpha)=2\sqrt{\cos 2\alpha}$　　C．$L'(\alpha)=\frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$　　D．$L'(\alpha)=\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$

12．若存在 (x,y) 满足 $\begin{cases}2x-3y+10>0\\x+2y-9>0\\3x-y-6<0\end{cases}$，且使得等式 $3x+a(2y-4ex)(\ln y-\ln x)=0$ 成立，其中 e 为自然对数的

底数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0)\cup\left[\frac{3}{2e},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{3}{2e},+\infty\right)$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $\left(0,\frac{3}{2e}\right]$

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题（本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$（i 为虚数单位），则 $\overline{z}\cdot z^2=$____________.

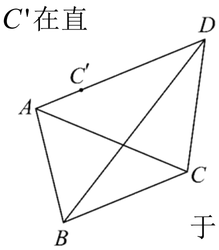
14. 已知 a 是 1 与 2 的等差中项， b 是 1 与 16 的等比中项，则 ab 等于____________.

15.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对于任意实数 x、y 均满足 $f\left(\frac{x+2y}{3}\right)=\frac{f(x)+2f(y)}{3}$，若 $f(2)=1$，$f(5)=10$，则 $f(724)=$____________.

16.成都石室中学校园文创产品圆台形纸杯如图所示，其内部上口直径、下口直径、母线的长度依次等于 8cm 、 6cm 、 12cm ，将纸杯盛满水后再将水缓慢倒出，当水面恰好到达杯底（水面恰好同时到达上口圆“最低处”和下口圆“最高处”）的瞬间的水面边缘曲线的离心率等于____________.

三、解答题（本题共 6 道小题，共 70 分）

17.（本小题满分 12 分）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，已知点 C 关于直线 BD 的对称点 C' 在直线 AD 上， $\angle CBD=\angle CDB=30°$， $\angle ACD=75°$.



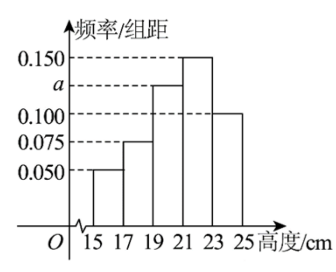
(Ⅰ)求 $\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}$ 的值；(Ⅱ)设 AC=3，求 AB^2 .

18.（本小题满分 12 分）某植物园种植一种观赏花卉，这种观赏花卉的高度(单位：cm)介于 $[15,25]$ 之间，现对植物园部分该种观赏花卉的高度进行测量，所得数据统计如下图所示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若从高度在 $[15,17)$ 和 $[17,19)$ 中分层抽样抽取 5 株，在这 5 株中随机抽取 3 株，记高度在 $[15,17)$ 内的株数为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

(Ⅲ)以频率估计概率，若在所有花卉中随机抽取 3 株，求至少有 2 株高度在 $[21,25]$ 的条件下，至多 1 株高度低于 23cm 的概率.

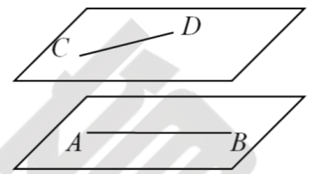


19．（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=ax^2-\ln x, a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)设 $a>0, g(x)=f(x)+bx$，且 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极值点，证明：$2b+\ln a\le 1-2\ln 2$.

20．（本小题满分 12 分）已知平面 α 与平面 β 是空间中距离为 1 的两平行平面，$AB\subset\alpha$，$CD\subset\beta$，且 $AB=CD=2$，AB 和 CD 的夹角为 $60°$.



(Ⅰ)证明：四面体 $ABCD$ 的体积为定值；

(Ⅱ)已知异于 C、D 两点的动点 $P\in\beta$，且 P、A、B、C、D 均在半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的球面上.当 PA，PB 与平面 α 的夹角均为 θ 时，求 $\cos\theta$.

21．（本小题满分 12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，以椭圆的顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的标准方程；(Ⅱ)我们称圆心在椭圆 C 上运动且半径为 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$ 的圆是椭圆 C 的“环绕圆”.过原点 O 作椭圆 C 的“环绕圆”的两条切线，分别交椭圆 C 于 A,B 两点，若直线 OA,OB 的斜率存在，并记为 k_1,k_2，求 k_1k_2 的取值范围.

选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．（本小题满分 10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{1}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t为参数)，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\sqrt{6}$.

(Ⅰ)写出直线 l 的普通方程和曲线 C_1 的参数方程；

(Ⅱ)若将曲线 C_1 上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 倍，纵坐标缩短为原来的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，得到曲线 C_2，设点 P 是曲线 C_2 上任意一点，求点 P 到直线 l 距离的最小值.

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23.（本小题满分 10 分）已知函数 $f\left(x\right)=\left|x-1\right|$.

(Ⅰ)解不等式 $f\left(2x\right)+f\left(x+4\right)\geq 6$；(Ⅱ)若 a 、$b\in \mathbf{R}$，$\left|a\right|<1$，$\left|b\right|<1$，证明：$f\left(ab\right)>f\left(a-b+1\right)$.