

文科数学参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	A	B	A	B	D	C	C	A	D

13. 4 14. -24 15. $(\sqrt{2}, +\infty)$ 16. $\sqrt{2}$

$$17. \text{解: (1) 由 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (60 \times 20 - 80 \times 40)^2}{100 \times 100 \times 140 \times 60} \approx 9.524 > 6.635.$$

知:有 99% 把握认为该地 35-50 岁年龄段人每周运动超过 2 小时与性别有关.....6 分

(2) 在以上被抽取且每周运动不超过 2 小时的人中,按性别进行分层抽样,共抽 6 人

在以上被抽取且每周运动不超过 2 小时的人中,按性别进行分层抽样,共抽 6 人,则女性抽取 4 人,记为: A_1, A_2, A_3, A_4 , 男性抽取 2 人,记为: B_1, B_2 , 从这 6 人中随机抽取 2 人,抽法有: $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1B_1, A_1B_2, A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1, A_2B_2, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_4B_1, A_4B_2, B_1B_2$ 共 15 种,

这两人中至少有一人是女性的抽法有:

 $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1B_1, A_1B_2, A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1, A_2B_2, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_4B_1, A_4B_2$ 共 14 种,故两人中至少有一人是女性的概率 $P = \frac{14}{15}$12 分

$$18. \text{解: (1) 由题可知: } \frac{a_{n+1} + (n+1)}{a_n + n} = \frac{2a_n + n - 1 + (n+1)}{a_n + n} = \frac{2a_n + 2n}{a_n + n} = 2, \text{ 且 } a_1 + 1 = 2,$$

故 $\{a_n + n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, $a_n + n = 2^n$, $a_n = 2^n - n$6 分

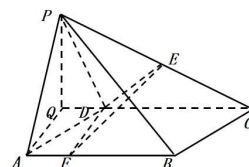
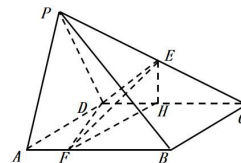
$$(2) b_n = \frac{1}{\log_2(a_n + n)} = \frac{1}{\log_2 2^n} = \frac{1}{n}, b_n b_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$T_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \text{ 且当 } n \text{ 趋于 } +\infty \text{ 时, 趋近于 } 1,$$

所以由 $T_n < m^2 - m - 1$ 恒成立, 可知 $m^2 - m - 1 \geq 1$, 解得 $m \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$12 分19. (1) 证明: 在正方形 $ABCD$ 中, $AD = CD$, 又 $AD = PD = 2$, $\therefore PD = CD = 2$ 在 $\triangle PCD$ 中, 点 E 为线段 PC 的中点, $DE \perp PC$, DE 平分 $\angle PDC$,在 $Rt\triangle CDE$ 中, $DE = CD \cos 60^\circ = 1$,过 E 作 $EH \perp CD$ 交 CD 于 H , 连接 FH , 则 $DH = DE \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,在正方形 $ABCD$ 中, $AF = \frac{1}{2}$, 四边形 $AFHD$ 是矩形, $\therefore CD \perp FH$, 又 $CD \perp EH$, $EH \cap FH = H$ $\therefore CD \perp$ 平面 EFH , 又 $EF \subset$ 平面 EFH , $\therefore CD \perp EF$6 分(2) 法一: 在 $\triangle PAD$ 中, $\because AD = PD = 2$, $PA = 2\sqrt{2}$, $\therefore AD \perp PD$,在正方形 $ABCD$ 中, $AD \perp CD$, 而 $CD \cap PD = D$, $CD, PD \subset$ 平面 PCD , $\therefore AD \perp$ 平面 PCD , $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore$ 平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, 交于直线 CD ,过 P 作 $PQ \perp CD$ 交 CD 于 Q , $\therefore PQ \perp$ 平面 $ABCD$, $\because \angle PDC = 120^\circ$, $\therefore \angle PDQ = 60^\circ$, $PQ = PD \sin 60^\circ = \sqrt{3}$,

$$S_{\triangle ABD} = 2,$$

$$V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{.....12 分}$$

法二: 在 $\triangle PAD$ 中, $\because AD = PD = 2$, $PA = 2\sqrt{2}$, $\therefore AD \perp PD$,在正方形 $ABCD$ 中, $AD \perp CD$, 而 $CD \cap PD = D$, $CD, PD \subset$ 平面 PCD ,

$\therefore AD \perp$ 平面 PCD ,

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = 2, S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} DP \cdot DC \sin 120^\circ = \sqrt{3}$$

$$V_{P-ABD} = V_{P-ACD} = V_{A-PCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle PCD} \cdot AD = \frac{2\sqrt{3}}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 证明: (1) $f(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3\sqrt{2}$, 设切点 $P(x_0, x_0^3 - 3\sqrt{2}x_0 + 2)$

$$\text{切线方程: } y - x_0^3 + 3\sqrt{2}x_0 - 2 = (3x_0^2 - 3\sqrt{2})(x - x_0)$$

$$\text{切线过原点, } -x_0^3 + 3\sqrt{2}x_0 - 2 = -3x_0^3 + 3\sqrt{2}x_0, \text{ 解得 } x_0 = 1,$$

$$\therefore \text{切线方程: } y = (3 - 3\sqrt{2})x$$

$$(2) f'(x) = 3x^2 - 3a,$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 至多一个零点;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm\sqrt{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < -\sqrt{a}$ 或 $x > \sqrt{a}$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -\sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增.

$$f(x) \text{ 有三个零点, 则 } \begin{cases} f(-\sqrt{a}) > 0 \\ f(\sqrt{a}) < 0 \end{cases} \quad f(x) = x^3 - 3ax + a^2$$

$$\text{即 } \begin{cases} a^2 + 2a\sqrt{a} > 0 \\ a^2 - 2a\sqrt{a} < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < a < 4,$$

当 $0 < a < 4$ 时, $a + 4 > \sqrt{a}$,

$$\text{且 } g(a+4) = (a+4)^3 - 3a(a+4) + a^2 = (a+4)(a^2 + 5a + 16) + a^2 > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(\sqrt{a}, a+4)$ 上有唯一一个零点,

$$\text{同理 } -2\sqrt{a} < -\sqrt{a}, g(-2\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + a^2 = a\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) < 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(-2\sqrt{a}, -\sqrt{a})$ 上有唯一一个零点,

又 $g(x)$ 在 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 上有唯一一个零点, 所以 $g(x)$ 有三个零点,

综上可知 a 的取值范围为 $(0, 4)$12 分

21. 解: (1) 由已知 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 则 $l_1: y = k_1(x+1)$, $l_2: y = k_2(x-1)$

$$\therefore \text{点 } P(x_0, y_0) \text{ 满足 } \begin{cases} y = k_1(x+1) \\ y = k_2(x-1) \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} \frac{1}{k_1} = \frac{x+1}{y} \dots\dots\dots ① \\ \frac{1}{k_2} = \frac{x-1}{y} \dots\dots\dots ② \end{cases} \quad \therefore ① + ② \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2x}{y} = -\frac{9}{4}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的轨迹方程是 } y = -\frac{8}{9}x (x \neq 0)$$

又, 依题意可知 $x \neq \pm 1$

综上可知: 直线 l_1 与 l_2 的交点 N 的轨迹 M 的方程为: $y = -\frac{8}{9}x (x \neq 0 \text{ 且 } x \neq \pm 1)$6 分

$$(2) \text{ 由题意知直线 } l_1: y = k_1(x+1), \text{ 与椭圆方程联立 } \begin{cases} 4x^2 + 5y^2 = 20 \\ y = k_1x + k_1 \end{cases},$$

$$\text{消元得 } (5k_1^2 + 4)x^2 + 10k_1^2x + 5k_1^2 - 20 = 0, \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-2k_1^2}{k_1^2 - 4}$$

$$k_{OA} + k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_2y_1 + x_1y_2}{x_1x_2} = 2k_1 + \frac{k_1(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{-8k_1}{k_1^2 - 4}$$

$$\text{同理可得 } k_{OC} + k_{OD} = \frac{-8k_2}{k_2^2 - 4},$$

$$\text{所以 } k_{OA} + k_{OB} + k_{OC} + k_{OD} = \frac{-8k_1}{k_1^2 - 4} + \frac{-8k_2}{k_2^2 - 4} = 0, \text{ 即 } (k_1 + k_2)(k_1k_2 - 4) = 0.$$

由(1)知 $k_1 \neq -k_2$, 所以 $k_1 k_2 = 4$, 令点 $P(9\lambda, -8\lambda)$, $\frac{8\lambda}{-1-9\lambda} \cdot \frac{-8\lambda}{9\lambda-1} = 4$, 解得 $\lambda = \pm \frac{\sqrt{65}}{65}$
 $\therefore$ 存在 $P\left(\frac{9\sqrt{65}}{65}, -\frac{8\sqrt{65}}{65}\right)$ 或 $P\left(-\frac{9\sqrt{65}}{65}, \frac{8\sqrt{65}}{65}\right)$ 满足题意.12 分

22.(1) $\because \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, $\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2 = ax (a > 0)$,

直线 l 的普通方程为: $x + y - 2 = 0$5 分

(2) 将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)

代入曲线 C 的直角坐标方程得: $t^2 - (8\sqrt{2} + \sqrt{2}a)t + 32 + 4a = 0$

$\Delta = (8\sqrt{2} + \sqrt{2}a)^2 - 4 \times (32 + 4a) = 2a^2 + 16a > 0$ 恒成立. ($a > 0$)

设交点 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 . 则 $t_1 + t_2 = (8\sqrt{2} + \sqrt{2}a)$, $t_1 t_2 = 32 + 4a$

若 $|PM|, |MN|, |PN|$ 成等比数列, 则 $|t_1 - t_2|^2 = |t_1 t_2|$

即: $a^2 + 6a - 16 = 0$

解得 $a = 2$ 或 $a = -8$ (舍) 所以满足条件的 $a = 2$10 分

23.(1) 因为 $f(x) = |x-2| + |2x-1|$,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 3x - 3$, 此时 $f(x) \geq 3 \times 2 - 3 = 3$;

当 $\frac{1}{2} < x < 2$ 时, $f(x) = x + 1$, 此时 $\frac{1}{2} + 1 < f(x) < 2 + 1$, 即 $\frac{3}{2} < f(x) < 3$;

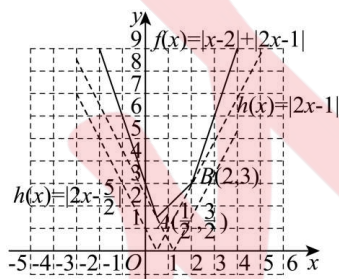
当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 3 - 3x$, 此时 $f(x) \geq 3 - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

综上, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$ 5 分

(2) 记 $h(x) = |2x - a|$, 作出 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图象,

要使 $f(x) \geq |2x - a|$ 恒成立,

则只需当函数 $h(x)$ 的图象过点 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 或 $B(2, 3)$ 时, 为临界情况 (如图),



由 $h\left(\frac{1}{2}\right) = |1 - a| = \frac{3}{2}$, 得 $a = \frac{5}{2}$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ (舍去),

由 $h(2) = |4 - a| = 3$, 得 $a = 1$ 或 $a = 7$ (舍去),

所以 $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$, 即实数 a 的取值范围为 $\left[1, \frac{5}{2}\right]$10 分