

理科数学参考答案

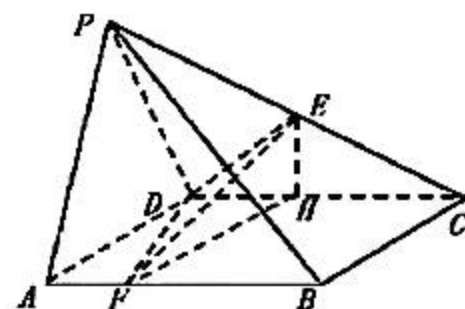
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	D	A	B	A	C	C	B	B	D

13.5 14. -24 15. $(\sqrt{2}, +\infty)$ 16.1216. 解析: 根据 $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = -2$, $\vec{OB} \cdot \vec{AB} = 2$, 可得 $\vec{OB} \cdot \vec{AB} - \vec{OA} \cdot \vec{AB} = (\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot \vec{AB} = \vec{AB}^2 = 4$ $\therefore |\vec{AB}| = 2$, $\therefore B$ 点轨迹是以 A 为圆心, 半径为 2 的圆.取 BC 的中点 E , 连接 BD, CD, AE, DE, OD ,则 $\vec{BD} \cdot \vec{CD} = (\vec{BE} + \vec{ED}) \cdot (\vec{CE} + \vec{ED}) = \vec{ED}^2 - \vec{BE}^2 = \vec{ED}^2 - 1$,又 $|\vec{AE}| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,所以 $|\vec{ED}|_{\min} = 2 - \sqrt{3}$, $|\vec{ED}|_{\max} = 2 + \sqrt{3}$,即 $2 - \sqrt{3} \leq |\vec{ED}| \leq 2 + \sqrt{3}$,所以 $(\vec{BD} \cdot \vec{CD})_{\min} = 6 - 4\sqrt{3}$, $(\vec{BD} \cdot \vec{CD})_{\max} = 6 + 4\sqrt{3}$.故 $\vec{BD} \cdot \vec{CD}$ 的最大值与最小值之和是 12.17. 解: (1) 由 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (60 \times 20 - 80 \times 40)^2}{100 \times 100 \times 140 \times 60} \approx 9.524 > 6.635$.

知: 有 99% 把握认为该地 35-50 岁年龄段人每周运动超过 2 小时与性别有关.....6 分

(2) 由已知得, $X \sim B(3, \frac{3}{10})$, $X = 0, 1, 2, 3$ $P(X=0) = (\frac{7}{10})^3 = \frac{343}{1000}$, $P(X=1) = C_3^1(\frac{3}{10}) \cdot (\frac{7}{10})^2 = \frac{441}{1000}$, $P(X=2) = C_3^2(\frac{3}{10})^2 \cdot (\frac{7}{10}) = \frac{189}{1000}$, $P(X=3) = C_3^3(\frac{3}{10})^3 = \frac{27}{1000}$,所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

所以 $E(X) = 0 \times \frac{343}{1000} + 1 \times \frac{441}{1000} + 2 \times \frac{189}{1000} + 3 \times \frac{27}{1000} = \frac{9}{10}$12 分18. 解: (1) 由题可知: $\frac{a_{n+1} + (n+1)}{a_n + n} = \frac{2a_n + n - 1 + (n+1)}{a_n + n} = \frac{2a_n + 2n}{a_n + n} = 2$, 且 $a_1 + 1 = 2$,故 $\{a_n + n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, $a_n + n = 2^n$, $a_n = 2^n - n$6 分(2) $b_n = \frac{1}{\log_2(a_n + n)} = \frac{1}{\log_2 2^n} = \frac{1}{n}$, $b_n b_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $T_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, 且当 n 趋于 $+\infty$ 时, 趋近于 1,所以由 $T_n < m^2 - m - 1$ 恒成立, 可知 $m^2 - m - 1 \geq 1$, 解得 $m \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$12 分19. (1) 证明: 在正方形 $ABCD$ 中, $AD = CD$, 又 $AD = PD = 2$, $\therefore PD = CD = 2$ 在 $\triangle PCD$ 中, 点 E 为线段 PC 的中点, $DE \perp PC$, DE 平分 $\angle PDC$,在 $Rt\triangle CDE$ 中, $DE = CD \cos 60^\circ = 1$,过 E 作 $EH \perp CD$ 交 CD 于 H , 连接 FH , 则 $DH = DE \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,在正方形 $ABCD$ 中, $AF = \frac{1}{2}$, $\therefore$ 四边形 $AFHD$ 是矩形, $\therefore CD \perp FH$, 又 $CD \perp EH$, $EH \cap FH = H$ 

$\therefore CD \perp$ 平面 EFH , 又 $EF \subset$ 平面 EFH , $\therefore CD \perp EF$6 分

(2) $\because AD = PD = 2, PA = 2\sqrt{2}, \therefore AD \perp PD$,

在正方形 $ABCD$ 中, $AD \perp CD$, 而 $CD \cap PD = D, AD \perp$ 平面 PCD ,

又 $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD ,

过 D 作 $DG \perp DC$ 交 PC 于点 G , 由平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD 得, $DG \perp$ 平面 $ABCD$,

故 DA, DC, DG 两两互相垂直, 以 D 为原点, 以 DA, DC, DG 所在直线分别为 x, y, z 轴,

建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), P(0,-1,\sqrt{3})$,

由 (1) 知: $DH = DE \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, EH = DE \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

F 是 AB 上靠近点 B 的三等分点, $\therefore AF = \frac{2}{3}AB = \frac{4}{3}, \therefore F(2, \frac{4}{3}, 0)$,

故 $\overrightarrow{DE} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{DF} = (2, \frac{4}{3}, 0)$,

设平面 DEF 的法向量 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DF} = 2x_1 + \frac{4}{3}y_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_1 = 2, \text{ 故 } y_1 = -3, z_1 = \sqrt{3}$$

平面 DEF 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (2, -3, \sqrt{3})$,

同理: 设平面 ADP 的法向量 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DP} = -y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DA} = 2x_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_2 = 1, \text{ 故 } y_2 = \sqrt{3}, x_2 = 0,$$

平面 ADP 的一个法向量 $\vec{n}_2 = (0, \sqrt{3}, 1)$,

设平面 DEF 与平面 DPA 所成的锐二面角的平面角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

故平面 DEF 与平面 DPA 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$12 分

20. 解: (1) 由已知 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$, 设 $P(9\lambda, -8\lambda), (\lambda \neq 0)$,

$$\therefore k_1 = \frac{-8\lambda}{-1-9\lambda}, k_2 = \frac{8\lambda}{1-9\lambda}, \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{-1-9\lambda}{8\lambda} + \frac{1-9\lambda}{8\lambda} = -\frac{9}{4} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由题意知直线 $l_1: y = k_1(x+1)$, 与椭圆方程联立 $\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 = 20 \\ y = k_1x + k_1 \end{cases}$,

$$\text{消元得 } (5k_1^2 + 4)x^2 + 10k_1^2x + 5k_1^2 - 20 = 0, \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-2k_1^2}{k_1^2 - 4}$$

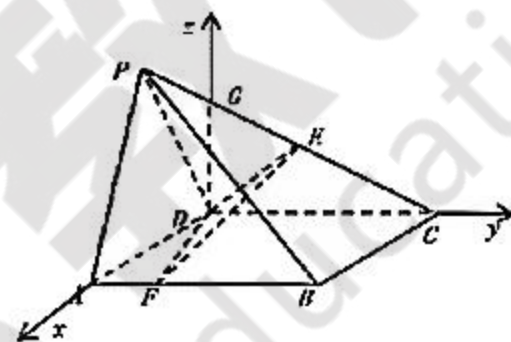
$$k_{OA} + k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_2y_1 + x_1y_2}{x_1x_2} = 2k_1 + \frac{k_1(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{-8k_1}{k_1^2 - 4}$$

$$\text{同理可得 } k_{OC} + k_{OD} = \frac{-8k_2}{k_2^2 - 4},$$

$$\text{所以 } k_{OA} + k_{OB} + k_{OC} + k_{OD} = \frac{-8k_1}{k_1^2 - 4} + \frac{-8k_2}{k_2^2 - 4} = 0, \text{ 即 } (k_1 + k_2)(k_1k_2 - 4) = 0.$$

由 (1) 知 $k_1 \neq -k_2$, 所以 $k_1k_2 = 4$, 令点 $P(9\lambda, -8\lambda), \frac{8\lambda}{-1-9\lambda} \cdot \frac{-8\lambda}{9\lambda-1} = 4$, 解得 $\lambda = \pm \frac{\sqrt{65}}{65}$

$\therefore$ 存在 $P(\frac{9\sqrt{65}}{65}, -\frac{8\sqrt{65}}{65})$ 或 $P(-\frac{9\sqrt{65}}{65}, \frac{8\sqrt{65}}{65})$ 满足题意.12 分



21. 证明: (I) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln x$, $f'(x) = x - 1 - \ln x$, 设切点 $P(x_0, \frac{x_0^2}{2} - x_0 \ln x_0)$

切线方程: $y - \frac{x_0^2}{2} + x_0 \ln x_0 = (x_0 - 1 - \ln x_0)(x - x_0)$

切线过原点, 解得 $x_0 = 2$

$\therefore$ 切线方程: $y = (1 - \ln 2)x$ 5 分

(II) $F(x) = -(x+a) \ln x + \frac{x^2}{2} - ax - a^2 + \frac{a}{2}$ $\therefore F'(x) = -\ln x - 1 - \frac{a}{x} + x - a$

$F''(x) = \frac{x^2 - x + a}{x^2}$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $x^2 - x > 0$, 则 $F''(x) = \frac{x^2 - x + a}{x^2} > 0$,

即 $F'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增。

且 $F'(1) = -2a < 0$, $F'(+\infty) > 0$ 。

$\exists$ 唯一 $x_0 \in (1, +\infty)$ 使得 $\therefore F'(x) = -\ln x - 1 - \frac{a}{x} + x - a = 0$ ①。

$\therefore F(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, $(x_0, +\infty)$ 上单调递增。

$\therefore$ 满足 $F(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解只需满足 $F'(x)_{\min} = F'(x_0) = 0$ 即可。

$F(x_0) = -(x_0 + a) \ln x_0 + \frac{x_0^2}{2} - ax_0 - a^2 + \frac{a}{2} = 0$, 将①代入化简得:

$2a^2 + (5x_0 - 2x_0^2)a - (x_0^3 - 2x_0^2) = 0$ 即 $(2a + x_0)(a - x_0^2 + 2x_0) = 0$

得 $a = -\frac{x_0}{2}$ (舍), $a = x_0^2 - 2x_0$

则 $a = x_0^2 - 2x_0$, 此时①变形为 $x_0^2 - 2x_0 - 1 + \ln x_0 = 0$

不妨设 $h(x) = x^2 - 2x - 1 + \ln x$,

显然 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。 $h(2) = \ln 2 - 1 < 0$, $h(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}) = \ln(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}) - \frac{1}{2} > 0$ 。

$\therefore x_0 \in (2, 1 + \frac{\sqrt{6}}{2})$, 则 $a = x_0^2 - 2x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ 结论得证12 分

22. (1) $\because \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, $\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2 = ax (a > 0)$,

直线 l 的普通方程为: $x + y - 2 = 0$ 5 分

(2) 将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)

代入曲线 C 的直角坐标方程得: $t^2 - (8\sqrt{2} + \sqrt{2}a)t + 32 + 4a = 0$

$\Delta = (8\sqrt{2} + \sqrt{2}a)^2 - 4 \times (32 + 4a) = 2a^2 + 16a > 0$ 恒成立. ($a > 0$)

设交点 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 . 则 $t_1 + t_2 = (8\sqrt{2} + \sqrt{2}a)$, $t_1 t_2 = 32 + 4a$

若 $|PM|, |MN|, |PN|$ 成等比数列, 则 $|t_1 - t_2|^2 = |t_1 t_2|$

即: $a^2 + 6a - 16 = 0$

解得 $a = 2$ 或 $a = -8$ (舍) 所以满足条件的 $a = 2$ 10 分

23. (1) 因为 $f(x) = |x - 2| + |2x - 1|$,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 3x - 3$, 此时 $f(x) \geq 3 \times 2 - 3 = 3$;

当 $\frac{1}{2} < x < 2$ 时, $f(x) = x + 1$, 此时 $\frac{1}{2} + 1 < f(x) < 2 + 1$, 即 $\frac{3}{2} < f(x) < 3$;

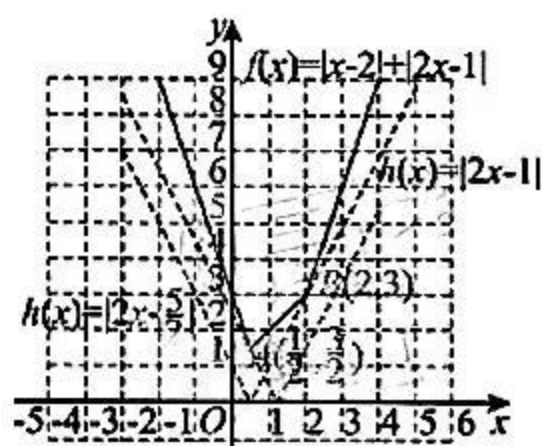
当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 3 - 3x$, 此时 $f(x) \geq 3 - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

综上, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$ 5 分

(2) 记 $h(x) = |2x - a|$, 作出 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图象,

要使 $f(x) \geq |2x - a|$ 恒成立,

则只需当函数 $h(x)$ 的图象过点 $A(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 或 $B(2, 3)$ 时, 为临界情况 (如图),



由 $h(\frac{1}{2}) = |1 - a| = \frac{3}{2}$, 得 $a = \frac{5}{2}$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ (舍去),

由 $h(2) = |4 - a| = 3$, 得 $a = 1$ 或 $a = 7$ (舍去),

所以 $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$, 即实数 a 的取值范围为 $[1, \frac{5}{2}]$ 10 分