

宜宾市普通高中 2021 级高考适应性考试

理科数学

(考试时间:120 分钟 全卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上,并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目,在规定的位置贴好条形码。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

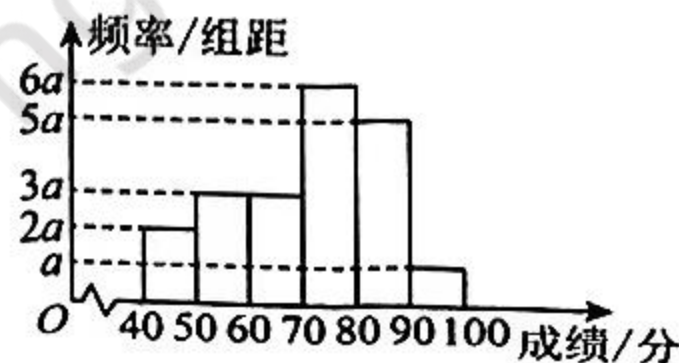
一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求。

1. 已知集合 $A = \{1, 4, 2x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 $x =$

- A. 0 B. 0 或 -2 C. 0 或 2 D. 2 或 -2

2. 为了加深师生对党史的了解,激发广大师生知史爱党、知史爱国的热情,某校举办了“学党史、育新人”的党史知识竞赛,并将 1000 名师生的竞赛成绩(满分 100 分,成绩取整数)整理成如图所示的频率分布直方图,则下列说法错误的是

- A. a 的值为 0.005
 B. 估计这组数据的众数为 75 分
 C. 估计成绩低于 60 分的有 250 人
 D. 估计这组数据的中位数为 $\frac{235}{3}$ 分



3. 下列各式中,正确的是

- A. $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = 1$ B. $\sqrt{1 - \sin 30^\circ} = \frac{1}{2}$
 C. $\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{4}$ D. $\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ = \frac{1}{2}$

4. 已知虚数 z 满足 $z^3 - 1 = 0$, 且 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则下列结论错误的是

- A. $z^2 + z + 1 = 0$ B. $|z| = 1$
 C. $z^2 = \bar{z}$ D. $z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2024} = 0$

5. 若曲线 $y = e^x + a$ 在 $x = 0$ 处的切线也是曲线 $y = \ln x$ 的切线, 则 $a =$

- A. -2 B. 1 C. -1 D. e

6. 在 $(3x^2 - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, 含 x 项的系数是

- A. -180 B. -90 C. 90 D. 180

7. 若 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos\alpha = -1$, 则 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) =$
- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
8. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长均为 4, E 为棱 PA 的中点, 则异面直线 BE 与 PC 所成角的余弦值为
- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
9. 某学校开展“五育并举”的选修课, 其中体育开设了 6 门课, 分别为篮球、足球、排球、网球、羽毛球、乒乓球, 甲、乙两名学生准备从中各选择 2 门课学习, 则甲、乙选修的课中至少有 1 门相同的概率为
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{5}$
10. 已知抛物线 $C: y^2 = 6x$, 过动点 P 作两条相互垂直的直线, 分别与抛物线 C 相切于点 A, B , 则 $\triangle PAB$ 面积的最小值是
- A. 6 B. 9 C. 12 D. 18
11. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调函数 $f(x)$, 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 有 $f[f(x) - \ln x] = 1$ 恒成立, 若方程 $f(x) \cdot f'(x) = m$ 有两个不同的实数根, 则实数 m 的取值范围为
- A. $(-\infty, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, 1]$ D. $(-\infty, 1]$
12. 已知 E, F 分别是棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 的对棱 AD, BC 的中点, 过 EF 的平面 α 与正四面体 $ABCD$ 相截, 得到一个截面多边形 τ , 则正确的选项是
- ①截面多边形 τ 可能是三角形或四边形.
 ②截面多边形 τ 周长的取值范围是 $[4, 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}]$.
 ③截面多边形 τ 面积的取值范围是 $[1, \sqrt{2}]$.
 ④当截面多边形 τ 是一个面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的四边形时, 四边形的对角线互相垂直.
- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①③④

二、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $x > 1$, 则 $x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值为_____.
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $a_1 = 1$, 且满足 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则数列 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为_____.
15. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, P 为双曲线右支上任意一点, 点 Q 的坐标为 $(0, \sqrt{2}b)$. 若 $|PF_2| - |PQ|$ 有最大值, 则双曲线 C 的离心率的取值范围是_____.
16. 已知点 O, A, B 在同一平面内且 A 为定点, $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = -2$, $\vec{OB} \cdot \vec{AB} = 2$, C, D 分别是点 B 轨迹上的点且 $BC = 2$, 则 $\vec{BD} \cdot \vec{CD}$ 的最大值与最小值之和是_____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17—21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必做题:共 60 分.

17. (12 分)

某地为调查年龄在 35—50 岁段人群每周的运动情况, 从年龄在 35—50 岁段人群中随机抽取了 200 人的信息, 将调查结果整理如下:

	女性	男性
每周运动超过 2 小时	60	80
每周运动不超过 2 小时	40	20

(1) 根据以上信息, 能否有 99% 把握认为该地年龄在 35—50 岁段人群每周运动超过 2 小时与性别有关?

(2) 用样本估计总体, 从该地年龄在 35—50 岁段人群中随机抽取 3 人, 设抽取的 3 人中每周运动不超过 2 小时的人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 > k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n - 1$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 证明: 数列 $\{a_n + n\}$ 是等比数列, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

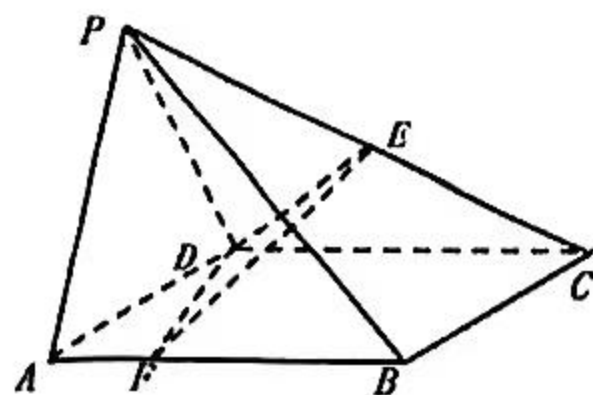
(2) 设 $b_n = \frac{1}{\log_2(a_n + n)}$, 数列 $\{b_n b_{n+1}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n < m^2 - m - 1$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, $AD = PD = 2$, $\angle PDC = 120^\circ$, $PA = 2\sqrt{2}$, 点 E 为线段 PC 的中点, 点 F 在线段 AB 上.

(1) 若 $AF = \frac{1}{2}$, 求证: $CD \perp EF$;

(2) 若 F 是 AB 上靠近点 B 的三等分点, 求平面 DEF 与平面 DPA 所成的锐二面角的余弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是直线 $l: y = -\frac{8}{9}x$ 上不同于原点 O 的一个动点, 斜率为 k_1 的直线 PF_1 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 斜率为 k_2 的直线 PF_2 与椭圆 E 交于 C, D 两点.

(1) 求 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ 的值;

(2) 是否存在点 P , 满足 $k_{OA} + k_{OB} + k_{OC} + k_{OD} = 0$? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由. ($k_{OA}, k_{OB}, k_{OC}, k_{OD}$ 分别为直线 OA, OB, OC, OD 的斜率)

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln x$, $g(x) = a(x + \ln x) + a^2 - \frac{a}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 过原点的切线方程;

(2) 求证: 存在 $a \in (0, \frac{1}{2})$, 使得 $f(x) \geq g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有解.

(二) 选做题: 共10分. 请考生在第22、23题中选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) [选修4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系中, 过点 $A(-2, 4)$ 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \theta = a \cos \theta$ ($a > 0$). 直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点.

(1) 求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若 $|AM|, |MN|, |AN|$ 成等比数列, 求实数 a 的值.

23. (10分) [选修4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x-2| + |2x-1|$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $f(x) \geq |2x-a|$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.