

2024 年南充三诊文科数学

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	A	A	C	A	D	B	D	A	C	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 需把答案填到答题卡上.

13. $[-4, 1) \cup (1, 4]$

14. -2

15. 1

16. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17—21 题是必考题须作答. 第 22, 23 题是选考题，根据要求作答.

17. 解：(1) $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, \bar{y} = \frac{27+23+20+17+13}{5} = 20$ 2 分

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 116, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -34$4 分

样本相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-34}{\sqrt{10} \times \sqrt{116}} = \frac{-34}{\sqrt{1160}} \approx \frac{-34}{34.06} \approx -0.998$

又 $|r| \approx 0.998 > 0.75$

所以可以判断 y 与 x 具有较强的线性相关关系.6 分

(2) 从 5 个月的利润中任选 2 个，不同的结果有：(27, 23), (27, 20), (27, 17), (27, 13), (23, 20), (23, 17), (23, 13), (20, 17), (20, 13), (17, 13), 共 10 个基本事件.8 分

记“ m, n 均不小于 20”为事件 A , 则事件 A 包含的基本事件为 (27, 23), (27, 20), (23, 20), 共 3 个基本事件.10 分

所以 $P(A) = \frac{3}{10}$.

即事件“ m, n 均不小于 20 万元”的概率为 $\frac{3}{10}$12 分

18. 解：(1) $f(x) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)\sin x + 2\cos 2x - 1$,

$= \sqrt{3}\sin 2x + 1 - \cos 2x + 2\cos 2x - 1$

$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 3 分

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 5 分

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ 6 分

(2) 证明：由 $f(A) = 1$, 得 $2\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 即： $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

在 $\triangle ABC$ 中, $\because A \in (0, \pi)$

$$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$$

$$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi,$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab$$

$$\therefore \sin C = 1.$$

又 $\because 0 < C < \pi$

$$\therefore C = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{6}, c = 2b, a = \sqrt{3}b.$$

$$\therefore a^2 = b^2 + bc \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 连接 CH .

由 $MB = CD = 2, MD = BC = 2\sqrt{3}, \angle BMD = \angle BCD = 90^\circ$

得: $BD = 4, \angle MDB = \angle DBC = 30^\circ, MH = \sqrt{3}, BH = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

在 $\triangle BCH$ 中, 由余弦定理得: $CH = \sqrt{BH^2 + BC^2 - 2BH \cdot BC \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{7}$

$$\therefore MH^2 + CH^2 = MC^2$$

$$\therefore MH \perp CH \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\because MH \perp BD$, 又 $CH, BD \subset$ 平面 $BCD, CH \cap BD = H$,

$\therefore MH \perp$ 平面 BCD

又 $\because CD \subset$ 平面 BCD

$$\therefore MH \perp CD \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) $\because NH \parallel MD$

$\therefore N$ 到平面 MCD 的距离与点 H 到平面 MCD 距离相等. 设 N 到平面 MCD 的距离为 d .

$$\text{又 } \frac{BN}{BM} = \frac{BH}{BD} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设点 B 到平面 MCD 距离为 h , $\therefore d = \frac{3}{4}h$.

$$\text{由 } V_{B-MCD} = V_{M-BCD} \text{ 得: } V_{M-BCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot MH = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\right) \times \sqrt{3} = 2. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\cos \angle MDC = \frac{4 + 12 - 10}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \sin \angle MDC = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

$$S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle MCD} \cdot h = 2$$

$$\therefore h = \frac{4\sqrt{39}}{13}$$

$$d = \frac{3}{4}h = \frac{3\sqrt{39}}{13}.$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 到平面 } MCD \text{ 的距离为 } \frac{3\sqrt{39}}{13} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 设圆 M 的半径为 r , 圆 M 与圆 P 内切于点 Q .

$\because$ 点 N 在圆 M 内部 $\therefore$ 点 P 在圆 M 内部.

$$\therefore PM + PN = PM + PQ = r = 4 > MN = 2\sqrt{3} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

那么点 P 的轨迹为焦点在 x 轴的椭圆, 设曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

$\because PM + PN = 4$ 可得: $2a = 4, \therefore a = 2. \quad 2c = MN = 2\sqrt{3}, \therefore c = \sqrt{3}$

$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1$

$\therefore$ 曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 法一: 联立韦达定理

显然直线 l 的斜率 k 存在, 设 $l: y - 1 = k(x - 2)$, 即: $y = kx - 2k + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

联立 l 与 $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx - 2k + 1 \end{cases}$ 得: $(4k^2 + 1)x^2 - (16k^2 - 8k)x + 16k^2 - 16k = 0$

由 $\Delta = (16k^2 - 8k)^2 - 4(4k^2 + 1)(16k^2 - 16k) > 0$ 得: $k > 0$

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{16k^2 - 8k}{4k^2 + 1} \quad x_1 x_2 = \frac{16k^2 - 16k}{4k^2 + 1}$ 6 分

显然直线 AM 的斜率 k_{AM} 存在且 $k_{AM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}$, 那么: $l_{AM}: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$.

令 $x = 0$ 得到点 P 的纵坐标 $y_P = \frac{-2y_1}{x_1 - 2}$. 同理: Q 点的纵坐标 $y_Q = \frac{-2y_2}{x_2 - 2}$ 8 分

那么: $y_P + y_Q = \frac{-2y_1}{x_1 - 2} + \frac{-2y_2}{x_2 - 2} = \frac{-2y_1(x_2 - 2) - 2y_2(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$

$= \frac{-2(kx_1 - 2k + 1)(x_2 - 2) - 2(kx_2 - 2k + 1)(x_1 - 2)}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$

$= \frac{-4kx_1 x_2 + (8k - 2)(x_1 + x_2) - 16k + 8}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$

$= \frac{-4k \frac{16k^2 - 16k}{4k^2 + 1} + (8k - 2) \frac{16k^2 - 8k}{4k^2 + 1} - \frac{64k^3 + 16k}{4k^2 + 1} + \frac{32k^2 + 8}{4k^2 + 1}}{\frac{16k^2 - 16k}{4k^2 + 1} - 2 \frac{16k^2 - 8k}{4k^2 + 1} + 4}$

$= \frac{-64k^3 + 64k^2 + 128k^3 - 64k^2 - 32k^2 + 16k - 64k^3 - 16k + 32k^2 + 8}{4k^2 + 1}$

$= \frac{4}{4k^2 + 1}$

$= \frac{8}{4k^2 + 1} = 2$ 11 分

$\therefore \frac{y_P + y_Q}{2} = 1$ 即: PQ 的中点为 $(0, 1)$ 12 分

法二: 齐次化

显然直线 AM 的斜率 k_{AM} 存在且 $k_{AM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}$, 那么: $l_{AM}: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$.

令 $x = 0$ 得到 $y_P = \frac{-2y_1}{x_1 - 2}$. 同理: $y_Q = \frac{-2y_2}{x_2 - 2}$ 6 分

由题意知: 直线 MN 不过 $(2, 0)$, 那么可设直线 $MN: m(x - 2) + ny = 1 \dots \textcircled{1}$

$\because$ 直线 MN 过点 $T(2, 1)$

$\therefore n = 1$ 7 分

又椭圆方程: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 即: $(x - 2)^2 + 4(x - 2) + 4y^2 = 0 \dots \textcircled{2}$

由①②得: $(x-2)^2 + 4(x-2)[m(x-2) + ny] + 4y^2 = 0$

$$\text{即: } 4\left(\frac{y}{x-2}\right)^2 + 4n\frac{y}{x-2} + 4m + 1 = 0$$

$$\text{即: } 4\left(\frac{y}{x-2}\right)^2 + 4\frac{y}{x-2} + 4m + 1 = 0 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$\therefore M, N$ 是直线 MN 与椭圆 Γ 的交点.

$\therefore \frac{y_1}{x_1-2}, \frac{y_2}{x_2-2}$ 是一元二次方程 $4x^2 + 4x + 4m + 1 = 0$ 的两根.

由 $\Delta = 16 - 16(4m + 1) > 0$ 得: $m < 0$

$$\text{由韦达定理得: } \frac{y_1}{x_1-2} + \frac{y_2}{x_2-2} = -1 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{y_P + y_Q}{2} = -\left(\frac{y_1}{x_1-2} + \frac{y_2}{x_2-2}\right) = 1 \quad \text{即: } PQ \text{ 的中点为 } (0, 1) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

【说明: 若未写 $\Delta > 0$ 扣 1 分】

$$21. \text{解: (1) 由 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x + ax \text{ 得: } f'(x) = x - \cos x + a \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

令 $f'(x) = h(x)$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x + x \quad h(x) = x - \cos x + 1$$

$$\therefore h'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \quad \text{故 } h(x) \text{ 在 } R \text{ 上单调递增, 又 } h(0) = 0 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\therefore x \in (-\infty, 0), f'(x) = h(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

$x \in (0, +\infty), f'(x) = h(x) > 0, f(x)$ 单调递增. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 证明: ①由 (1) 知: $h(x) = f'(x) = x - \cos x + a$

$\therefore h'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \quad \therefore h(x)$ 在 R 上单调递增. 即: $f'(x)$ 在 R 上单调递增.

$$\text{又 } f'(-2-a) = -2 - \cos(2+a) < 0 \quad f'(2-a) = 2 - \cos(2-a) > 0$$

$$\therefore f'(-2-a) \cdot f'(2-a) < 0 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$\therefore f'(x)$ 存在唯一的变号零点 x_0 .

即: $f(x)$ 有且仅有一个极值点 x_0 . $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

②由①知: $f(x)$ 有且仅有一个极值点 x_0 且 $f'(x_0) = x_0 - \cos x_0 + a = 0$

$$\text{当 } a \in [-1-\pi, 1] \text{ 时, } f'(0) = -1 + a \leq 0 \quad f'(\pi) = \pi + 1 + a \geq 0$$

$$\text{由①知: } 0 \leq x_0 \leq \pi \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

要证: $f(x_0) \geq g(x_0)$

$$\text{只需证: } F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2 - \sin x_0 + ax_0 - \left(-\frac{1}{2}x_0^2 + 2\sin x_0 - 2x_0\right) \geq 0$$

$$\text{而 } a = \cos x_0 - x_0 \quad \text{那么: } F(x_0) = 2x_0 - 3\sin x_0 + x_0 \cos x_0 \quad (0 \leq x_0 \leq \pi).$$

$$\therefore F'(x_0) = 2 - 2\cos x_0 - x_0 \sin x_0$$

$$\text{令: } P(x_0) = F'(x_0) \quad \text{则 } P'(x_0) = \sin x_0 - x_0 \cos x_0$$

$$\text{令: } S(x_0) = P'(x_0) \quad \text{则 } S'(x_0) = x_0 \sin x_0$$

又 $x_0 \in [0, \pi]$ 时:

$$\therefore S'(x_0) \geq 0$$

$\therefore S(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 即: $P'(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 又 $P'(0) = 0$

$$\therefore P'(x_0) \geq 0$$

$\therefore P(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 即: $F'(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 又 $F'(0) = 0$

$$\therefore F'(x_0) \geq 0$$

$\therefore F(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增.

$$\therefore F(x_0) \geq F(0) = 0 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述: 当 $a \in [-1 - \pi, 1]$ 时, $f(x_0) \geq g(x_0)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1) 因为 $(e^t + \frac{1}{e^t})^2 - (e^t - \frac{1}{e^t})^2 = 4$, 所以 $y^2 - x^2 = 4$ $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又 $\because y = e^t + \frac{1}{e^t} \geq 2\sqrt{e^t \cdot \frac{1}{e^t}} = 2$ $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

曲线 C_1 的普通方程为 $y^2 - x^2 = 4 (y \geq 2)$ $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

【说明: 若未给出范围 $y \geq 2$, 扣 1 分】

(2) $\because x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

$\therefore$ 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 4 (\rho \sin \theta \geq 2)$ $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

设点 $A(\rho_1, \alpha)$, 则 $|OA| = |\rho_1| = \sqrt{\frac{4}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}}$ $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设点 $B(\rho_2, \alpha)$, 则 $|OB| = |\rho_2| = |4 \cos \alpha|$ $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$\therefore \frac{|OA|}{|OB|} = \sqrt{2}$, 化简为 $16 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 = 0$, 即为 $(4 \cos^2 \alpha - 1)^2 = 0$

得 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$, 又因为 $\overrightarrow{OA} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{OB}$ 且 $\alpha \in [0, \pi)$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

【说明: 若多求出一个 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 扣 1 分】

23. 法一:

解: 由 $a > 0, b > 0$ 且 $a^2 + b^2 = 2$, 可设 $a = \sqrt{2} \cos \theta, b = \sqrt{2} \sin \theta$ ($\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$). $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

则 $ab = \sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \sin \theta = \sin 2\theta$

$\because \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\therefore 2\theta \in (0, \pi)$

$\therefore ab \in (0, 1]$ $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(1) $\because 2a + 3b = 2\sqrt{2} \cos \theta + 3\sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{26} \sin(\theta + \varphi)$ 其中 $\tan \varphi = \frac{2}{3}$ 且 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\therefore$ 当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $2a + 3b$ 取得最大值 $\sqrt{26}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) $(a^3 + b^3)(a + b) = (a + b)^2(a^2 + b^2 - ab) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - ab)$
 $= (2 + 2\sin 2\theta)(2 - \sin 2\theta)$ $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

令 $\sin 2\theta = t$, 则 $(a^3 + b^3)(a + b) = (2 + 2t)(2 - t) = -2t^2 + 2t + 4$ ($t \in (0, 1]$)

令 $f(t) = -2t^2 + 2t + 4$, 则 $f(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减.

$\therefore f(1) \leq f(t) \leq f(\frac{1}{2})$ 即: $4 \leq f(t) \leq \frac{9}{2}$ $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$\therefore 4 \leq (a + b)(a^3 + b^3) \leq \frac{9}{2}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

法二:

解: (1) 由柯西不等式得: $(a^2 + b^2)(2^2 + 3^2) \geq (2a + 3b)^2$ $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

即: $(2a + 3b)^2 \leq 26$

故: $2a + 3b \leq \sqrt{26}$ $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

当且仅当 $\begin{cases} 3a = 2b \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{26}}{13} \\ b = \frac{3\sqrt{26}}{13} \end{cases}$, 时取得等号, $\therefore 2a + 3b$ 的最大值为 $\sqrt{26}$4 分

(2) 证明: 要证 $4 \leq (a^3 + b^3)(a + b) \leq \frac{9}{2}$

只需证: $4 \leq a^4 + b^4 + ab(a^2 + b^2) \leq \frac{9}{2}$

只需证: $4 \leq (a^2 + b^2)^2 + ab(a^2 + b^2) - 2a^2b^2 \leq \frac{9}{2}$

只需证: $4 \leq 4 + 2ab - 2a^2b^2 \leq \frac{9}{2}$ 6 分

$\because$ 正实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 = 2$, 所以 $2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立

$\therefore 0 < ab \leq 1$ 8 分

设 $ab = t \in (0, 1]$, 则 $f(t) = -2t^2 + 2t + 4, t \in (0, 1]$

$\because f(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增; 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减. 又 $f(0) = f(1) = 4, f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$

$\therefore 4 \leq f(t) \leq \frac{9}{2}$, 即: $4 \leq (a + b)(a^3 + b^3) \leq \frac{9}{2}$10 分