

2024 届“三诊”数学参考答案

一、选择题 (60 分)

理科 CDBAA DCDBC DA 文科 CDBAA DCDBD CB

二、填空题 (20 分) 13.6 14.2 理科 15.18 16. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ 文科 15. $\sqrt{6}$ 16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

三、解答题 (70 分)

$$18. (1) \bar{x} = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5, \bar{y} = \frac{3+4+4+4+5}{5} = 4,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -3 \times (-1) + (-1) \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 3 + 1 \times 1 = 6,$$

$$\text{由于 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 9 + 1 + 0 + 1 + 9 = 20, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2$$

$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{6}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} \approx 0.95,$$

因为 $r > 0.75$, 所以 y 与 x 具有较强的线性相关关系.....6 分

$$\text{理科 (2) } X \text{ 可取 } 0, 1, 2, P(X=0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = 1.2 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

文科 (2) 将地点 1, 2, 3, 4, 5 分别记为 a, b, c, d, e 任抽 2 个地点的可能情况有 $(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)$ 共 10 种, 其中在地点 3, 4, 5, A 型无人运输机指标数均高于 B 型无人运输机指标数, 即 $(c, d), (c, e), (d, e)$ 3 种情况, 故所求概率为 $\frac{3}{10} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$18. (1) \text{ 由 } S_n - na_n = \frac{1}{2}n(n-1), \text{ 得 } S_{n+1} - S_n - (n+1)a_{n+1} + na_n = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\therefore -na_{n+1} + na_n = n \therefore a_{n+1} - a_n = -1$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -1 的等差数列.....6 分

$$(2) \text{ 又 } a_5, a_9, a_{11} \text{ 成等比数列, } a_9^2 = a_5 a_{11}, (a_1 - 8)^2 = (a_1 - 4)(a_1 - 10) \therefore a_1 = 12$$

$$\therefore a_n = 13 - n, a_{12} = 1 > 0, a_{13} = 0$$

$$\text{故 } (S_n)_{\max} = S_{12} = S_{13} = 78 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

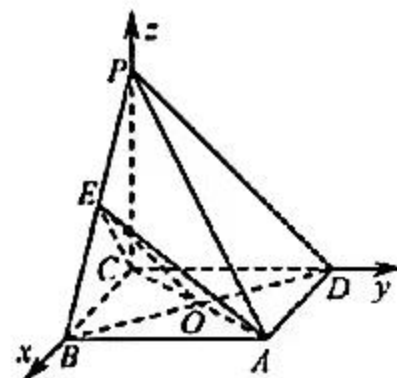
(1) 证明: 如图, 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 EO ,因为 $ABCD$ 是正方形, 所以 O 是 BD 的中点,又 $PD \parallel$ 平面 ACE , $PD \subset$ 平面 PBD , 平面 $PBD \cap$ 平面 $ACE = EO$, 所以 $PD \parallel EO$ 因为 O 为 BD 的中点, 所以 E 是 PB 的中点.....5 分

(理)(2) 因为 $PB = PD = \sqrt{2}$, $PC = BC = CD = 1$, 所以由勾股定理知 $PC \perp BC$, $PC \perp CD$, 又 $BC \perp CD$, 故以 C 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $P(0,0,1)$.

设 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PB}$ ($0 < \lambda < 1$), 设 $E(a,b,c)$, 则 $\overrightarrow{PE} = (a,b,c-1)$, $\overrightarrow{PB} = (1,0,-1)$,

$\lambda \overrightarrow{PB} = (\lambda, 0, -\lambda)$, 则 $a = \lambda, b = 0, c = 1 - \lambda$,

则 $E(\lambda, 0, 1 - \lambda)$, $\overrightarrow{CE} = (\lambda, 0, 1 - \lambda)$, $\overrightarrow{CA} = (1, 1, 0)$,



由 $BD \perp AC$ 且 $BD \perp PC$, 可知 $\vec{m} = \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$ 是平面 PAC 的一个法向量.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 EAC 的法向量, 则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$,

即 $\begin{cases} x+y=0 \\ \lambda x+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$, 取 $x = -1$, $y = 1$, $z = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, 则 $\vec{n} = \left(-1, 1, \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)$,

由题意 $|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{2 + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ ($\lambda = 2$ 舍去), 即 $\frac{PE}{BE} = 2$.

所以线段 PB 上存在点 E , 使得 $\frac{PE}{BE} = 2$ 满足条件.....12 分

(文)(2) 因为 $PB = PD = \sqrt{2}$, $PC = BC = CD = 1$, 由勾股定理知 $PC \perp BC$, $PC \perp CD$, 而 $BC \cap CD = C$, 所以 $PC \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$.

又 $PC \perp AD$, $AD \perp CD$, $PC \cap CD = C$, 得 $AD \perp$ 平面 PCD , 从而 $AD \perp PD$,

所以 $S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 设线段 PB 上存在点 E , 使点 E 到平面 PAD 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$,

设 $\frac{PE}{EB} = \lambda$ ($\lambda > 0$), 则 $\frac{PE}{PB} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, 因为 $V_{E-PAD} = \frac{\lambda}{1+\lambda} V_{B-PAD} = \frac{\lambda}{1+\lambda} V_{P-ABD}$,

即 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \times \frac{1}{6}$, 解得 $\lambda = 2$. 所以线段 PB 上存在点 E , $\frac{PE}{EB} = 2$ 满足.....12 分

理科 20 文科 21 (1) 由题知 $\begin{cases} \frac{b}{c} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}(2b \times 2c) = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2$

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(2) 因为 $\frac{3^2}{4} + \frac{1^2}{3} > 1$ 所以点 $A(1, 3)$ 椭圆 E 外, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$

当直线 PQ 斜率存在时, 设直线 PQ 方程为 $y-3=k(x-1)$ 联立

$$\begin{cases} y-3=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2+(2k-8k^2)x+4k^2-24k+4=0$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow k^2+2k-2 > 0 \Leftrightarrow k < -\sqrt{3}-1 \text{ 或 } k > \sqrt{3}-1$$

$$x_1+x_2=\frac{8k^2-24k}{3+4k^2}, x_1x_2=\frac{4k^2-24k-4}{3+4k^2}$$

$$\frac{|AP|}{|AQ|}=\frac{|MP|}{|MQ|} \Rightarrow \frac{1-x_1}{1-x_2}=\frac{x_1-x_0}{x_0-x_2} \Rightarrow x_0=\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{2-(x_1+x_2)}=\frac{4k-8}{4k+1}$$

$$y_0=k(x_0-3)+1=\frac{3k+3}{4k+1} \text{ 消去 } k \text{ 得 } x_0+4y_0-4=0$$

当直线 PQ 斜率不存在时 $M(1, \frac{3}{4})$ 也满足 $x_0+4y_0-4=0$

所以 M 在直线 $x+4y-4=0$ 上且在椭圆 E 的内部

$$\text{设 } F_2(1,0) \text{ 关于线 } PQ \text{ 对称点 } E(x_3, y_3), \text{ 由 } \begin{cases} \frac{1+x_3}{2}+4 \times \frac{y_3}{2}-4=0 \\ \frac{y_3}{x_3-1}(-\frac{1}{4})=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=\frac{23}{17} \\ y_3=\frac{24}{17} \end{cases}$$

$$\because |MF_1|+|MF_2|=|MF_1|+|ME| \geq |EF_1|=\frac{8\sqrt{34}}{17}. \text{ 所以直线 } F_1E: y=\frac{3}{5}(x+1)$$

$$\text{由 } \begin{cases} y=\frac{3}{5}(x+1) \\ x+4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{20}{17}, \frac{12}{17}) \text{ 在椭圆内部}$$

$$\text{使得 } |MF_1|+|MF_2| \text{ 的最小值为 } \frac{8\sqrt{34}}{17}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

文科 20 理科 21 (1) $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}(x>0)$, 所以 $a \leq 0, x \in (0, \infty), f(x)$ 单调递减;

$$a > 0, x \in (0, \frac{1}{a}), f'(x) < 0, x \in (\frac{1}{a}, \infty), f'(x) > 0$$

所以 $x \in (0, \frac{1}{a}), f(x)$ 单调递减; $x \in (\frac{1}{a}, \infty), f(x)$ 单调递增;4 分

(2) $a > 0$ 由 (1) 知函数 $f(x)$ 有唯一零点 $x_1 = \frac{1}{a}$,

$$f(x_1) = a \ln x_1 + \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{1}{x_1} (\ln x_1 + x_1 + 1) = 0 \Rightarrow \ln x_1 + x_1 + 1 = 0$$

设 $h(x) = \ln x + x + 1$, $h(\frac{1}{e}) > 0$, $h(\frac{1}{e^2}) < 0$, 而 $h(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递增, 所以 $x_1 \in (\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$

$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 R 上单调递增, 又 $g(0) = -\frac{a}{e^2} < 0$, $\therefore x_2 > 0$

令 $\varphi(x) = x - \sin x - \frac{1}{e^2 x}$, $\varphi'(x) = 1 - \cos x + \frac{1}{e^2 x^2} > 0$ 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递增

$$\therefore \varphi(x_1) < \varphi(\frac{1}{e}) = -\sin \frac{1}{e} < 0 \quad \text{而 } g(x_2) = x_2 - \sin x_2 - \frac{a}{e^2} = x_2 - \sin x_2 - \frac{1}{x_1 e^2} = 0$$

$$\therefore g(x_1) = x_1 - \sin x_1 - \frac{1}{x_1 e^2} < g(x_2) = x_2 - \sin x_2 - \frac{1}{x_1 e^2} \therefore x_1 < x_2 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (1) 由题意知 $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$, $C_2: x-y=0$ 联立解得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

即 $M(-2, -2)$, $N(2, 2)$ 或 $M(2, 2)$, $N(-2, -2)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设 $P(1 + \sqrt{10} \cos \alpha, -1 + \sqrt{10} \sin \alpha)$, 不妨设 $M(-2, -2)$, $N(2, 2)$, 则

$$\begin{aligned} |PM|^2 + |PN|^2 &= (\sqrt{10} \cos \alpha - 1)^2 + (\sqrt{10} \sin \alpha - 3)^2 + (\sqrt{10} \cos \alpha + 3)^2 + (\sqrt{10} \sin \alpha + 1)^2 \\ &= 40 + 4\sqrt{10} \cos \alpha - 4\sqrt{10} \sin \alpha = 40 + 8\sqrt{5} \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

所以 $|PM|^2 + |PN|^2$ 的取值范围为 $[40 - 8\sqrt{5}, 40 + 8\sqrt{5}]$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$23. \quad (1) \quad f(x) = |2x-1| - |x+1| = \begin{cases} x-2, & x > \frac{1}{2} \\ -3x, & -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -x+2, & x < -1 \end{cases} \therefore x = \frac{1}{2}, f(x) \text{ 最小值 } m = -\frac{3}{2} \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 知, $m = -\frac{3}{2}$, 所以 $a-2b+2c=1$, 根据柯西不等式得

$$(a^2 + b^2 + c^2)[1^2 + (-2)^2 + 2^2] \geq (a-2b+2c)^2 = 1, \text{ 当且仅当 } \frac{a}{1} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{2} \text{ 时取等号,}$$

又 $a-2b+2c=1$, 所以当且仅当 $a = \frac{1}{9}, b = -\frac{2}{9}, c = \frac{2}{9}$ 时取等号,

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{9} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$