

机密★启用前 [考试时间：2024年5月9日下午3:00—5:00]

乐山市高中 2024 届第三次调查研究考试

文科数学

(本试卷共 4 页，满分 150 分。考试时间 120 分钟)

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{1, 2\}$ ， $C = \{x | x = a + b, a \in A, b \in B\}$ ，则集合 C 的元素个数为

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

2. 若复数 z 满足 $(1-i)z = (1+i)$ ， $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $\bar{z}$ 的虚部为

A. 1

B. -1

C. i

D. -i

3. 为了解某中学三个年级的学生对食堂饭菜的满意程度，用分层随机抽样的方法抽取 30% 的学生进行调查，已知该中学学生人数和各年级学生的满意率分别如图 1 和图 2 所示，则样本容量和抽取的二年级学生中满意的人数分别为

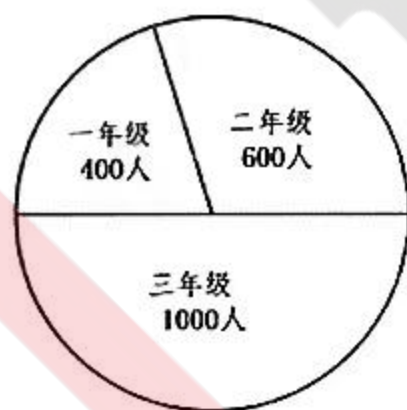


图 1

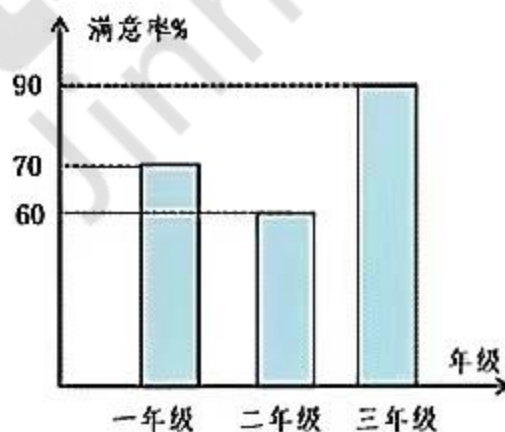


图 2

A. 800, 360

B. 600, 108

C. 800, 108

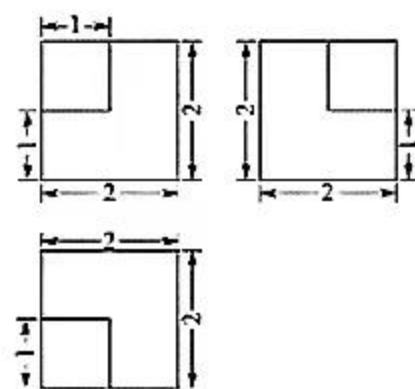
D. 600, 360

4. 已知 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ，且 α 为第二象限角，则 $\cos \alpha =$ A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$ 5. 设双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ ，椭圆 $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 ，若 $e_1 = 2\sqrt{3}e_2$ ，则 $a =$ A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. 一个多面体的三视图如图所示，则该多面体的表面积为

A. 20

- B. 24
C. 28
D. 32



7. 在区间 $[-5, 10]$ 上任取一个整数 m , 则使函数 $f(x) = x^2 - 2mx - 2m$ 存在两个不同零点的概率为

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{3}{16}$ C. $\frac{13}{16}$ D. $\frac{15}{16}$

8. 已知 $f(x) = (x-3)^2 \cos(\omega x)$, 若存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为奇函数, 则 ω 的可能值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. π

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 边上靠近点 C 的三等分点, 若 $\angle ABD = 90^\circ$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{7}$, 则 $S_{\triangle ABC} =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{9}{4}$

10. 若 $a = \log_3 2$, $b = \log_4 3$, $c = e^{-2}$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $b < c < a$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

11. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 D 在棱 BB_1 上, 且 $BB_1 = 3BD$, 点 M 在棱 A_1C_1 上, 且 M 为 A_1C_1 的中点, 点 N 在直线 BB_1 上, 若 $MN \parallel$ 平面 ADC_1 , 则 $\frac{NB}{NB_1} =$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

12. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 16$, 点 E 是 $l: 2x - y + 16 = 0$ 上的动点, 过 E 作圆 O 的切线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 与 EO 交于点 M , 则 $|OM|$ 的最大值为

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a = (1, 1)$, $b = (-2, \lambda)$, $c = (-1, -2)$, 若 $(a+b) \perp c$, 则实数 λ 的值是_____.

14. 若关于 x, y 的不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ kx - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域是等腰直角三角形, 则 k 的值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$ 在区间 $[0, m]$ 上有且仅有 3 个零点, 则 m 的取值范围是_____.

16. 峨眉山是一个著名的旅游和朝圣地, 以其壮丽的自然风光和宗教文化遗址而闻名. 其中“九十九道拐”景点约有 2000 级台阶, 某游客一次上 1 个或 2 个台阶, 设爬上第 n 个台阶的方法数为 a_n , 给出下列四个结论:

- ① $a_4 = 5$; ② $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$; ③ $\sum_{i=1}^7 a_i = 52$; ④ $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤.

17. (本小题满分 12 分)

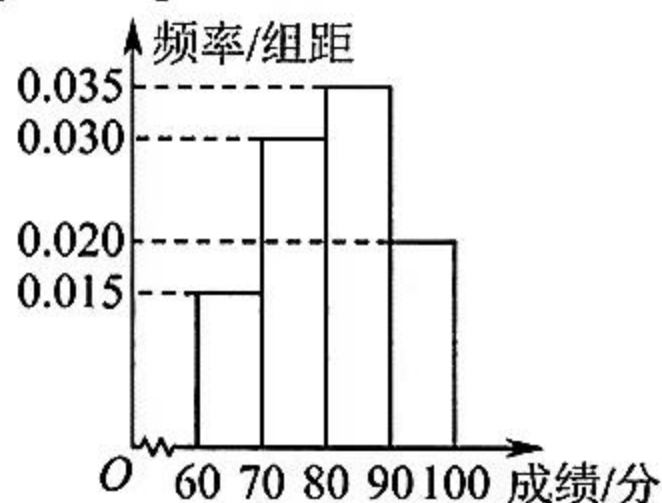
已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 证明: $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 是等差数列;

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 的前 n 项和, 若 $S_1 = 2$, $S_4 = 14$, 求 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

某学校举办了一次主题为“科技兴国，强国有我”的知识竞赛，并从所有参赛学生中随机抽取了男、女生各 50 人，统计他们的竞赛成绩（满分 100 分，每名参赛学生至少得 60 分），并将成绩分成 4 组： $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$ （单位：分），得到如下的频率分布直方图.



(1) 试用样本估计总体的思想，估计这次竞赛中参赛学生成绩的众数及平均数：（同一组数据用该组数据的区间中点值作代表）

(2) 现将竞赛成绩不低于 90 分的学生称为“科技知识达人”，成绩低于 90 分的学生称为“非科技知识达人”. 把随机抽取的参赛学生数据统计如下，请将下列 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 95% 的把握认为能否获得“科技知识达人”称号与性别有关.

	科技知识达人	非科技知识达人	合计
男生	15		
女生			
合计			

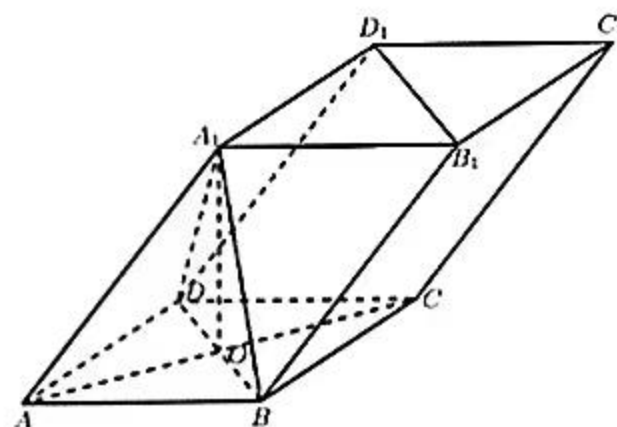
附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ （其中 $n = a+b+c+d$ ）.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AA_1 = \sqrt{6}$ ， $\angle A_1AB = \angle A_1AD$ ， AC 与 BD 交于 O ， $\angle A_1AO = 45^\circ$.

- (1) 证明： $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ ；
- (2) 求四棱锥 $A_1-BB_1D_1D$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax + \ln x - ax^2$

- (1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 求 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A, C 分别是椭圆 E 的上

下顶点, B, D 分别是椭圆 E 的左右顶点, 点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 E 上, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 点 Q 是椭圆 E 上的动点 (不与 A, B, C, D 重合), l 是 E 在点 A 处的切线, 直线 AB 交 DQ 于点 M , 直线 CQ 交 l 于点 N , 求证: 直线 MN 的斜率为定值.

请考生在第 22-23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $x + y = 2$, C_2 的方程为 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, C_3 是一条经过原点且斜率为正的直线.

- (1) 以坐标原点为极点, x 轴正方向为极轴建立极坐标系, 求 C_1, C_2 的极坐标方程;
(2) 若 C_3 与 C_1, C_2 分别相交于异于原点的 M, N 两点, 当 $\frac{2}{|OM|} + |ON| = \sqrt{10}$ 时, 求 C_3 的直角坐标方程.

23. (本小题满分 10 分)

设不等式 $0 < |x - 2| - |x + 1| < 2$ 的解集为 M , $a, b \in M$.

- (1) 证明: $|3a + 5b| < 4$;
(2) 比较 $2|a + b|$ 与 $|1 + 4ab|$ 的大小.