

乐山市高中 2024 届第三次调查研究考试 文科数学参考答案及评分意见

2024. 5

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

CBBAB BCACD DB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-\frac{1}{2}$;

14. -1 或 0;

15. $[\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12})$;

16. ①②④.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. (1) 证明: $\because S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, 2 分

$$\therefore \frac{S_n}{n} = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$
 3 分

$$\therefore \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} - \frac{(a_1 + a_{n-1})}{2} = \frac{d}{2}$$
 5 分

$$\therefore \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \text{ 是等差数列.}$$
 6 分

(2) $\because S_1 = 2, S_4 = 14$,

$$\therefore \text{数列} \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \text{ 的首项为 } 2, \text{ 第四项为 } \frac{7}{2}$$
 8 分

$$\therefore \text{公差 } d' = \frac{\frac{7}{2} - 1}{3} = \frac{1}{2}$$
 10 分

$$\therefore T_n = 2n + \frac{1}{4}n(n-1) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{7}{4}n$$
 12 分

18. 解: (1) 由频率分布直方图可知众数为: 85. 2 分

$$\bar{x} = 65 \times 0.015 \times 10 + 75 \times 0.030 \times 10 + 85 \times 0.035 \times 10 + 95 \times 0.020 \times 10$$
 4 分

即 $\bar{x} = 81$ 6 分

(2)

	科技知识达人	非科技知识达人	合计
男生	15	35	50
女生	5	45	50
合计	20	80	100

..... 8 分

$$K^2 = \frac{100(15 \times 45 - 5 \times 35)^2}{20 \times 80 \times 50 \times 50} = \frac{25}{4} = 6.25 > 3.841$$
 11 分

故有 95% 的把握认为能否获得“科技知识达人”称号与性别有关. 12 分

19. (1) 证明: 连结 BC_1, DC_1 , $\because$ 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\therefore AB = AD$. $\because \angle A_1AB = \angle A_1AD, AA_1 = AA_1$, $\therefore \triangle A_1AB \cong \triangle A_1AD, \therefore BA_1 = DA_1$ 1 分

∵点O为线段BD中点，∴ $A_1O \perp BD$2分

在 $\triangle A_1AO$ 中， $AA_1 = \sqrt{6}$ ， $AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$ ， $\angle A_1AO = 45^\circ$ ，

∴ $\cos \angle A_1AO = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{A_1A^2 + OA^2 - A_1O^2}{2 \times A_1A \times OA}$ ，∴ $A_1O = \sqrt{3}$4分

则 $A_1A^2 = OA^2 + A_1O^2$ ，∴ $A_1O \perp OA$5分

又 $OA \cap BD = O$ ， $OA \subset$ 平面ABCD， $BD \subset$ 平面ABCD，

∴ $A_1O \perp$ 平面ABCD.6分

(2) 解法1：由(1)知 $A_1O \perp BD$ ，又四边形ABCD为菱形，∴ $AC \perp BD$ ，

∴ $BD \perp$ 平面 A_1OA ，∴ $BD \perp AA_1$ ，

又 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是平行六面体，所以 $AA_1 \parallel BB_1$ ，

∴四边形为 BB_1D_1D 矩形.

由(1) $A_1O = \sqrt{3}$ ， $OB = 1$ ， $A_1O \perp OB$ ，所以 $A_1B = A_1D = 2$ ，

从而 $A_1B = A_1D = A_1B_1 = A_1D_1 = 2$ ，

连结 B_1D ， BD_1 交于 O_1 ，连结 A_1O_1 ，

在 $\triangle DA_1B_1$ 中， $A_1D = A_1B_1$ ， O_1 为 B_1D 的中点，

∴ $A_1O_1 \perp B_1D$ ，

同理 $A_1O_1 \perp BD_1$ ，

∴ $A_1O_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D ，线段 A_1O_1 的长为 A_1 到平面 BB_1D_1D 的距离.8分

由 $BD = 2$ ， $BB_1 = \sqrt{6}$ ，可得 $DB_1 = 2DO_1 = 2\sqrt{2}$ ，

在直角三角形 A_1DO_1 中，由勾股定理可得 $A_1O_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$10分

∴ $V_{A_1-BB_1D_1D} = \frac{1}{3} \cdot A_1O_1 \cdot S_{BB_1D_1D} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 2$12分

解法2：因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为平行六面体，∴ BB_1D_1D 为平行四边形.

∴ $S_{\triangle BB_1D_1} = S_{\triangle DD_1B} = \frac{1}{2} S_{BB_1D_1D}$8分

∴ $V_{A_1-BB_1D_1D} = 2V_{A_1-DD_1B_1} = 2V_{D-A_1B_1D_1} = 2V_{A_1-ABD}$10分

∴ $V_{A_1-BB_1D_1D} = 2V_{A_1-ABD} = 2 \times \frac{1}{3} \times A_1O \times S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = 2$12分

20.解：(1) 当 $a = 1$ 时， $f(x) = x + \ln x - x^2$ ，定义域为 $(0, +\infty)$ ，

∴ $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - 2x = -\frac{(x-1)(2x+1)}{x}$1分

当 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 为增函数；2分

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 为减函数.3分

综上， $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.4分

(2) 由题可知 $f'(x) = \frac{1+ax-2ax^2}{x}$ ，令 $h(x) = 1+ax-2ax^2 = ax(1-2x) + 1$

①当 $a \leq 0$ 时，由 $x > 1$ 可知 $h(x) > 0$ ，即 $f'(x) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 为增函数.

∴对任意 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $f(x) > f(1) = 0$, 符合题意.6 分

由 $2ax^2 - ax - 1 = 0$ 解得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4}$ 或 $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4}$7 分

∵ $x_1 < 0$, 下面讨论 x_2 与 1 的大小:

②当 $0 < a < 1$ 时, $x_2 > 1$, 则 $f(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上单调递增.

∴存在 $x_0 \in (1, x_2)$, 使得 $f(x_0) > f(1) = 0$9 分

③当 $a \geq 1$ 时, $x_1 < x_2 \leq 1$, 对任意 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$

∴ $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数, $f(x) < f(1) = 0$ 恒成立, 不符合题意.11 分

综上所述, $a \in (-\infty, 1)$ 时, 存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $H(x_0) > 0$12 分

21.解: (1) ∵ $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$, ∴ $c = \sqrt{3}$1 分

∵点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 E 上,

∴ $\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{a^2 - 3} = 1$, 解得 $a^2 = 4$ 或 $a^2 = \frac{3}{4}$ (舍).3 分

∴ $a^2 - b^2 = 3$, ∴ $b^2 = 1$.

∴椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$5 分

(2) 易知直线 DQ 斜率不为 0, 设直线 DQ 方程为 $x = ty + 2$, $Q(x_0, y_0)$

∵ AB 直线方程为: $x - 2y + 2 = 0$,

∴联立 $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = ty + 2 \end{cases}$, 得 $M(\frac{2t+4}{2-t}, \frac{4}{2-t})$7 分

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = ty + 2 \end{cases}$, 得 $(t^2 + 4)y^2 + 4ty = 0$,

∵ $D(2, 0)$, ∴ $y_0 = \frac{-4t}{t^2 + 4}$, $x_0 = ty_0 + 2 = \frac{-2t^2 + 8}{t^2 + 4}$9 分

∴直线 CQ 的斜率为: $k_{CQ} = \frac{-1 - \frac{-4t}{t^2 + 4}}{0 - \frac{-2t^2 + 8}{t^2 + 4}} = \frac{2-t}{2(t+2)}$ 10 分

∴直线 CQ 方程为: $y = \frac{2-t}{2(t+2)}x - 1$.

令 $y = 1$, 得 $N(\frac{4(t+2)}{2-t}, 1)$11 分

∴ $k_{MN} = \frac{\frac{4}{2-t} - 1}{\frac{4(t+2)}{2-t} - \frac{4(t+2)}{2-t}} = \frac{2+t}{-2(t+2)} = -\frac{1}{2}$12 分

22.解：(1) $\because C_1$ 的直角坐标方程 $x+y=2$,

$\therefore C_1$ 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 2$ 2 分

$\because C_2$ 的直角坐标方程 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 化简得: $x^2 + y^2 - 2y = 0$,

$\therefore C_2$ 的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta$ 5 分

(2) 由曲线 C_3 是经过原点且斜率为正的直线. 故其极坐标方程可设为 $\theta = \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$,

由题可得 $\begin{cases} \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$, 得 $|OM| = \frac{2}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ 6 分

由 $\begin{cases} \rho = 2 \sin \theta \\ \theta = \alpha \end{cases}$, 得 $|ON| = 2 \sin \alpha$ 7 分

$\therefore \frac{2}{|OM|} + |ON| = 3 \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{10} \sin(\alpha + \varphi) = \sqrt{10}$, $\tan \varphi = \frac{1}{3}$

$\therefore \alpha + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\tan \alpha = \tan(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{1}{\tan \varphi} = 3$ 9 分

故 C_3 的直角坐标方程为 $y = 3x$ 10 分

23. (1) 证明: 记 $f(x) = |x-2| - |x+1|$

则 $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -1, \\ -2x+1, & -1 < x < 2, \\ -3, & x \geq 2. \end{cases}$ 2 分

$\because 0 < f(x) < 2$, 解得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, 即 $M = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 3 分

$\because a, b \in M$, $\therefore |a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$

则 $|3a+5b| \leq 3|a| + 5|b| < 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 4$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $a^2 < \frac{1}{4}, b^2 < \frac{1}{4}$ 7 分

则 $4|a+b|^2 - |1+4ab|^2 = (4a^2-1)(4b^2-1) < 0$,

$\therefore 2|a+b| > |1+4ab|$ 10 分