

机密★启用前 [考试时间：2024年5月9日下午3:00—5:00]

乐山市高中 2024 届第三次调查研究考试

理科数学

(本试卷共 4 页, 满分 150 分。考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 10, x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*\}$, 则集合 A 的元素个数为

- A. 9 B. 8 C. 6 D. 5

2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位, 若 $a - 2i$ 和 $1 + bi$ 互为共轭复数, 则复数 $z = a + (b - 1)i$ 的模为

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 10 D. $\sqrt{10}$

3. 已知 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 且 α 为第二象限角, 则 $\cos \alpha =$

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

4. 设双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$, 椭圆 $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 , 若 $e_1 = 2\sqrt{3}e_2$, 则 $a =$

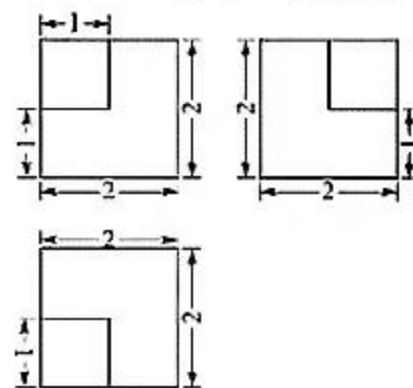
- A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. 设 $(x + 2024)(2x - 1)^{2023} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2024}x^{2024}$, 则 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2024}}{2^{2024}} =$

- A. 1 B. -1 C. 2024 D. -2024

6. 一个多面体的三视图如图所示, 则该多面体的表面积为

- A. 20
B. 24
C. 28
D. 32

7. 已知 $f(x) = (x - 3)^2 \cos(\omega x)$, 若存在常数 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x + a)$ 为奇函数, 则 ω 的可能值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. π

8. 在区间 $[-5, 10]$ 上任取一个实数 m ，则使函数 $f(x) = x^3 - 3mx^2 - 6mx + 1$ 存在两个极值点的概率为

- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{11}{15}$ D. $\frac{13}{15}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AC 边上靠近点 C 的三等分点，若 $\angle ABD = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ， $BC = \sqrt{7}$ ，则 $S_{\triangle ABC} =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{9}{4}$

10. 若 $a = \log_3 2$ ， $b = \log_4 3$ ， $c = e^{-2}$ ，则 a, b, c 的大小关系是

- A. $b < c < a$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

11. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，点 D 在棱 BB_1 上，满足 $V_{A-BCC_1D} = \frac{4}{9}V_{ABC-A_1B_1C_1}$ ，点 M 在棱 A_1C_1 上，

且 $\overline{A_1M} = \overline{MC_1}$ ，点 N 在直线 BB_1 上，若 $MN \parallel$ 平面 ADC_1 ，则 $\frac{NB}{NB_1} =$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

12. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ ，点 $F(-2, \frac{1}{2} + \sqrt{19})$ ，点 E 是 $l: 2x - y + 16 = 0$ 上的动点，过 E 作圆 O 的切线，切点分别为 A, B ，直线 AB 与 EO 交于点 M ，则 $|MF|$ 的最小值为

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{19}}{2}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 i, j 是夹角为 60° 的单位向量，若 $(\lambda i + j)(2i - j) = 1$ ，则实数 λ 的值是_____.

14. 若关于 x, y 的不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ kx - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域是等腰直角三角形，则 k 的值为_____.

15. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 1$ 在区间 $[0, m]$ 上有且仅有 3 个零点，则 m 的取值范围是_____.

16. 峨眉山是一个著名的旅游和朝圣地，以其壮丽的自然风光和宗教文化遗址而闻名. 其中“九十九道拐”景点约有 2000 级台阶，某游客一次上 1 个或 2 个台阶，设爬上第 n 个台阶的方法数为 a_n ，给出下列四个结论：

- ① $a_5 = 8$ ；② $3a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n+3}$ ；③ $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$ ；④ $\sum_{i=1}^{2000} a_i^2 = a_{2000}a_{2001} - 1$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤.

17. (本小题满分 12 分)

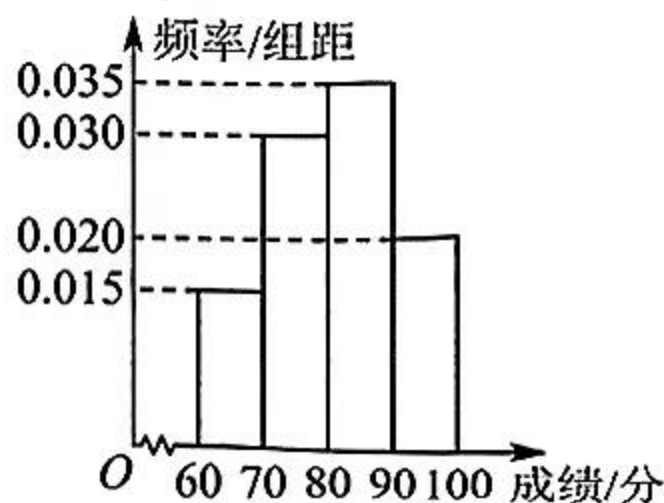
已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 证明： $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列；

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和，若 $S_1 = 2$ ， $S_4 = 14$ ，求 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

某学校举办了一次主题为“科技兴国，强国有我”的知识竞赛，并从所有参赛学生中随机抽取了男、女生各 50 人，统计他们的竞赛成绩（满分 100 分，每名参赛学生至少得 60 分），并将成绩分成 4 组： $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$ （单位：分），得到如下的频率分布直方图.



(1) 现将竞赛成绩不低于 90 分的学生称为“科技知识达人”，成绩低于 90 分的学生称为“非科技知识达人”.把随机抽取的参赛学生数据统计如下，将下列 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 95% 的把握认为能否获得“科技知识达人”称号与性别有关.

	科技知识达人	非科技知识达人	合计
男生	15		
女生			
合计			

(2) 将频率视为概率，从所有参赛学生中随机抽取 3 人进行访谈，记这 3 人中是“科技知识达人”的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列与数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ (其中 $n = a+b+c+d$).

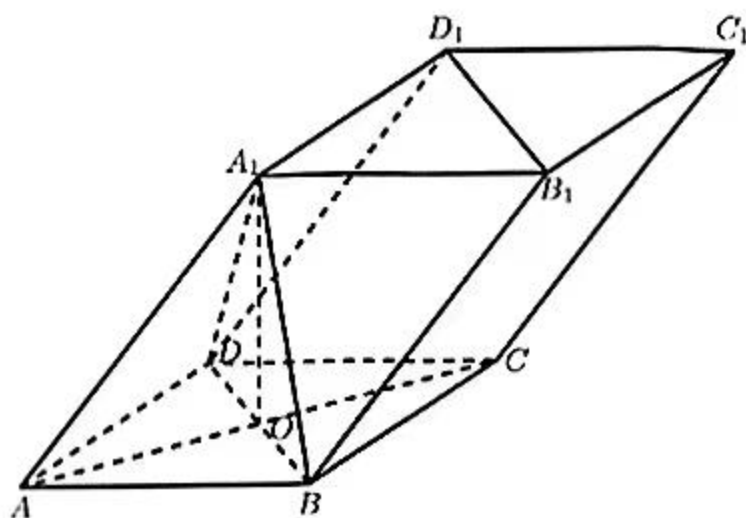
$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AA_1 = \sqrt{6}$ ， $\angle A_1AB = \angle A_1AD$ ， AA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° ， AC 与 BD 交于 O .

(1) 证明： $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 求二面角 $B-CC_1-D$ 的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A, C 分别是椭圆 E 的上

下顶点, B, D 分别是椭圆 E 的左右顶点, 点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 E 上, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 点 Q 是椭圆 E 上的动点 (不与 A, B, C, D 重合), l 是 E 在点 A 处的切线, 直线 AB 交 DQ 于点 M , 直线 CQ 交 l 于点 N , 求证: 直线 MN 的斜率为定值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, $g(x) = a(\frac{1}{x} - x - 1) + 1 - x$

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 令 $H(x) = f(x) + g(x)$, 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $H(x) < \frac{1-x-x^2}{x}$ 成立, 求整数 a 的最小值.

请考生在第 22-23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $x + y = 2$, C_2 的方程为 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, C_3 是一条经过原点且斜率为正的直线.

- (1) 以坐标原点为极点, x 轴正方向为极轴建立极坐标系, 求 C_1, C_2 的极坐标方程;
- (2) 若 C_3 与 C_1, C_2 分别相交于异于原点的 M, N 两点, 当 $\frac{2}{|OM|} + |ON| = \sqrt{10}$ 时, 求 C_3 的直角坐标方程.

23. (本小题满分 10 分)

设不等式 $0 < |x - 2| - |x + 1| < 2$ 的解集为 M , $a, b \in M$.

- (1) 证明: $|3a + 5b| < 4$;
- (2) 比较 $2|a + b|$ 与 $|1 + 4ab|$ 的大小.