

乐山市高中 2024 届第三次调查研究考试 理科数学参考答案及评分意见

2024. 5

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

CBABC BADCD DB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{2}{3}$;

14. -1 或 0;

15. $[\pi, \frac{4\pi}{3})$;

16. ①②④.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. (1) 证明： $\because S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, 2 分

$\therefore \frac{S_n}{n} = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$ 3 分

$\therefore \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} - \frac{(a_1 + a_{n-1})}{2} = \frac{d}{2}$ 5 分

$\therefore \left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 是等差数列. 6 分

(2) $\because S_1 = 2, S_4 = 14$,

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 的首项为 2, 第四项为 $\frac{7}{2}$ 8 分

$\therefore$ 公差 $d' = \frac{\frac{7}{2} - 2}{3} = \frac{1}{2}$ 10 分

$\therefore T_n = 2n + \frac{1}{4}n(n-1) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{7}{4}n$ 12 分

18. 解：(1)

	科技知识达人	非科技知识达人	合计
男生	15	35	50
女生	5	45	50
合计	20	80	100

..... 2 分

$K^2 = \frac{100(15 \times 45 - 5 \times 35)^2}{20 \times 80 \times 50 \times 50} = \frac{25}{4} = 6.25 > 3.841$, 5 分

故有 95% 的把握认为能否获得“科技知识达人”称号与性别有关. 6 分

(2) 从所有参赛学生中任取一人是“科技知识达人”的概率 $p = \frac{1}{5}$ (或者 $p = 0.2$)

由题意可知： $\xi \sim B(3, \frac{1}{5})$, ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3

$\therefore p(\xi = 0) = C_3^0 (1 - \frac{1}{5})^3 \times (\frac{1}{5})^0 = \frac{64}{125}$, (或者 $p(\xi = 0) = 0.512$) 7 分

$$p(\xi=1) = C_3^1 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{48}{125}, \text{ (或者 } p(\xi=1) = 0.384 \text{)} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$p(\xi=2) = C_3^2 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{12}{125}, \text{ (或者 } p(\xi=2) = 0.096 \text{)} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$p(\xi=3) = C_3^3 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}, \text{ (或者 } p(\xi=3) = 0.008 \text{)} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$$\therefore E(\xi) = 0 \times \frac{64}{125} + 1 \times \frac{48}{125} + 2 \times \frac{12}{125} + 3 \times \frac{1}{125} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5} \text{ (或者 } E(\xi) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \text{)} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明：连结 BC_1, DC_1 ，

$\because$ 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\therefore AB = AD$ 。

$\because \angle A_1AB = \angle A_1AD$ ， $AA_1 = AA_1$ ，

$\therefore \triangle A_1AB \cong \triangle A_1AD$ ， $\therefore BA_1 = DA_1$ 。 $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\because$ 点 O 为线段 BD 中点， $\therefore A_1O \perp BD$ 。 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because ABCD$ 为菱形， $\therefore AC \perp BD$ ， $\therefore BD \perp$ 平面 AA_1C ，

又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore$ 平面 $A_1AC \perp$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore AA_1$ 在平面 $ABCD$ 上的射影为 AC ，

$\therefore \angle A_1AO$ 为直线 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，即 $\angle A_1AO = 45^\circ$ $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

在 $\triangle A_1AO$ 中， $AA_1 = \sqrt{6}$ ， $AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$ ， $\angle A_1AO = 45^\circ$ ，

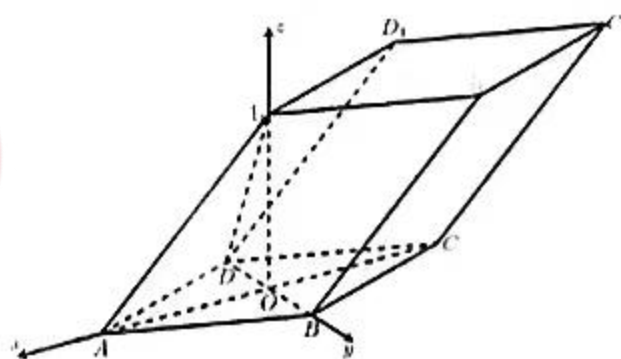
$$\therefore \cos \angle A_1AO = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{A_1A^2 + OA^2 - A_1O^2}{2 \times A_1A \times OA}, \therefore A_1O = \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

则 $A_1A^2 = OA^2 + A_1O^2$ ， $\therefore A_1O \perp OA$ 。 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

又 $OA \cap BD = O$ ， $OA \subset$ 平面 $ABCD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ 。 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知 $AC \perp BD$ ， $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ ， 建立如图所示的空间直角坐标系



则 $B(0,1,0)$ ， $D(0,-1,0)$ ， $A(\sqrt{3},0,0)$ ， $C(-\sqrt{3},0,0)$ ， $A_1(0,0,\sqrt{3})$ ，

则 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} = (-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{CB} = (-\sqrt{3},-1,0)$ ， $\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3},1,0)$ $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

设平面 CBC_1 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ， 平面 CDD_1 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{CC_1} \cdot \vec{m} = 0, \\ \overrightarrow{CB} \cdot \vec{m} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ -\sqrt{3}x_1 - y_1 = 0, \end{cases} \text{取 } x_1 = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (1, -\sqrt{3}, 1). \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CC_1} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0, \end{cases} \text{取 } x_2 = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 1). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设二面角 $B-CC_1-D$ 大小为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{5}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\therefore \text{二面角 } B-CC_1-D \text{ 的正弦值为 } \frac{2\sqrt{6}}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20. \text{解: (1)} \because S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}, \therefore c = \sqrt{3}. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$\because$ 点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 E 上,

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{a^2 - 3} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 4 \text{ 或 } a^2 = \frac{3}{4} \text{ (舍)}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because a^2 - b^2 = 3, \therefore b^2 = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 易知直线 DQ 斜率不为 0, 设直线 DQ 方程为 $x = ty + 2$, $Q(x_0, y_0)$

$\because AB$ 直线方程为: $x - 2y + 2 = 0$,

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = ty + 2 \end{cases}, \text{ 得 } M(\frac{2t+4}{2-t}, \frac{4}{2-t}). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = ty + 2 \end{cases}, \text{ 得 } (t^2 + 4)y^2 + 4ty = 0,$$

$$\because D(2, 0), \therefore y_0 = \frac{-4t}{t^2 + 4}, x_0 = ty_0 + 2 = \frac{-2t^2 + 8}{t^2 + 4}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } CQ \text{ 的斜率为: } k_{CQ} = \frac{-1 - \frac{-4t}{t^2 + 4}}{0 - \frac{-2t^2 + 8}{t^2 + 4}} = \frac{2-t}{2(t+2)}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } CQ \text{ 方程为: } y = \frac{2-t}{2(t+2)}x - 1.$$

$$\text{令 } y = 1, \text{ 得 } N(\frac{4(t+2)}{2-t}, 1). \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore k_{MN} = \frac{\frac{4}{2-t} - 1}{\frac{2t+4}{2-t} - \frac{4(t+2)}{2-t}} = \frac{2+t}{-2(t+2)} = -\frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21.解：(1) 由题意 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = a + \frac{1}{x}$ 1 分

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 2 分

当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$

当 $x \in (0, -\frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增. 3 分

当 $x \in (-\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减. 4 分

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减. 5 分

(2) 由题知 $H(x) < \frac{1-x-x^2}{x} (x > 1)$, 化简得: $x \ln x + 2x - 1 < a(x-1)$

问题等价于: 存在 $x > 1$, 使 $a > \frac{x \ln x + 2x - 1}{x-1}$ 成立. 6 分

设 $h(x) = \frac{x \ln x + 2x - 1}{x-1} (x > 1)$, 则 $h'(x) = \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2}$ 7 分

设 $\varphi(x) = x - \ln x - 2$,

$\therefore \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$, $\therefore \varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 8 分

又 $\because \varphi(3) = 1 - \ln 3 < 0$, $\varphi(4) = 2 - \ln 4 > 0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(3, 4)$ 上存在唯一零点. 9 分

设零点 $x_0 \in (3, 4)$, 则 $\varphi(x_0) = 0$, 即 $x_0 - 2 = \ln x_0$ 10 分

$\therefore h(x)$ 在 $(1, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + 2x_0 - 1}{x_0 - 1} = x_0 + 1$ 11 分

$\therefore x_0 \in (3, 4)$, 且 $a \in \mathbb{Z}$, $\therefore a$ 的最小值为 5. 12 分

22.解：(1) $\because C_1$ 的直角坐标方程 $x + y = 2$,

$\therefore C_1$ 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 2$ 2 分

$\because C_2$ 的直角坐标方程 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 化简得: $x^2 + y^2 - 2y = 0$,

$\therefore C_2$ 的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta$ 5 分

(2) 由曲线 C_3 是经过原点且斜率为正的直线. 故其极坐标方程可设为 $\theta = \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$,

由题可得 $\begin{cases} \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$, 得 $|OM| = \frac{2}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ 6 分

由 $\begin{cases} \rho = 2\sin\theta \\ \theta = \alpha \end{cases}$, 得 $|ON| = 2\sin\alpha$ 7 分

$\therefore \frac{2}{|OM|} + |ON| = 3\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{10}\sin(\alpha + \varphi) = \sqrt{10}$, $\tan\varphi = \frac{1}{3}$

$\therefore \alpha + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha = \tan(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{1}{\tan\varphi} = 3$ 9 分

故 C_3 的直角坐标方程为 $y = 3x$ 10 分

23. (1) 证明: 记 $f(x) = |x-2| - |x+1|$

则 $f(x) = \begin{cases} 3, x \leq -1, \\ -2x+1, -1 < x < 2, \\ -3, x \geq 2. \end{cases}$ 2 分

$\therefore 0 < f(x) < 2$, 解得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, 即 $M = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 3 分

$\therefore a, b \in M$, $\therefore |a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$

则 $|3a+5b| \leq 3|a| + 5|b| < 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 4$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $a^2 < \frac{1}{4}, b^2 < \frac{1}{4}$ 7 分

则 $4|a+b|^2 - |1+4ab|^2 = (4a^2-1)(4b^2-1) < 0$,

$\therefore 2|a+b| > |1+4ab|$ 10 分