

2024 届高三数学试题参考答案(文科)

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

依题意得 $B = \{x | -2 \leq 2 - x \leq 2\} = [0, 4]$, 则 $A \cap B = \{1, 3\}$.

2. D 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 因为 $iz = 1 + 4i$, 所以 $i(a + bi) = -b + ai = 1 + 4i$,

所以 $\begin{cases} a = 4, \\ b = -1, \end{cases}$ 即 $z = 4 - i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(4, -1)$, 位于第四象限.

3. B 【解析】本题考查椭圆的离心率,考查数学运算的核心素养.

由题可知 $a^2 = m^2 + 2, b^2 = m^2, c^2 = a^2 - b^2 = 2, \frac{2}{m^2 + 2} = (\frac{\sqrt{3}}{3})^2$, 解得 $m = \pm 2$.

4. C 【解析】本题考查线与面的位置关系,考查逻辑推理的核心素养.

当 $m // l$ 时, m 可能在 α 内或者 β 内, 故不能推出 $m // \beta$ 且 $m // \alpha$.

当 $m // \beta$ 且 $m // \alpha$ 时, 设存在直线 $n \subset \alpha, n \not\subset \beta$, 且 $n // m$, 因为 $m // \beta$, 所以 $n // \beta$, 根据直线与平面平行的性质定理, 可知 $n // l$, 所以 $m // l$.

故“ $m // l$ ”是“ $m // \beta$ 且 $m // \alpha$ ”的必要不充分条件.

5. C 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

画出可行域知(图略), 当 $l: y - 4x = 0$ 过点 $(\frac{3}{2}, 2)$ 时, z 取得最小值, 且最小值为 -4 .

6. B 【解析】本题考查古典概型,考查逻辑推理的核心素养.

设三人为 A, B, C , 则参加晚会的情况有 A, B, C, AB, AC, BC, ABC , 共 7 种情况, 其中恰有一人参加晚会的情况有 3 种, 故所求的概率为 $\frac{3}{7}$.

7. D 【解析】本题考查等差数列,考查运算求解能力.

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_1 + a_{16} = a_3 + a_{14} = 10$, 故 $S_{16} = \frac{16(a_1 + a_{16})}{2} = 80$.

8. A 【解析】本题考查程序框图,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $S < p$ 时, 执行循环体, $S \geq p$ 时, 结束循环, 输出 $n = 7$,

所以执行程序框图, $n = 1, S = 0; S = 1, n = 3; S = 1 + 3 = 4, n = 5; S = 4 + 5 = 9, n = 7$, 结束循环, 则 p 的取值范围为 $(4, 9]$.

9. D 【解析】本题考查复合函数以及三角函数的图象,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, ①正确; $f(x + \pi) = 2^{|\sin(x+\pi)| \cos(x+\pi)} = 2^{-|\sin x| \cos x} \neq$

$f(x)$, ②错误; 当 $x \in [\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 时, $f(x) = 2^{|\sin x| \cos x} = 2^{-\sin x \cos x} = 2^{-\frac{1}{2} \sin 2x}$, 因为 $2x \in [2\pi, \frac{5\pi}{2}]$, 所

以 $y = -\frac{1}{2} \sin 2x$ 在 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减, 又 $y = 2^x$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递

减, ③正确; 因为 $f(x+2\pi)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时,

$$f(x)=2^{|\sin x| \cos x}=\begin{cases} 2^{\frac{1}{2} \sin 2x}, & x \in [0, \pi], \\ 2^{-\frac{1}{2} \sin 2x}, & x \in (\pi, 2\pi], \end{cases} \text{ 则 } f(x) \text{ 的最小值为 } 2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ④正确. 故选 D.}$$

10. C 【解析】本题考查导数的几何意义, 考查逻辑推理的核心素养.

在曲线 $y=\ln x$ 上任取一点 $P(t, \ln t)$, 对函数 $y=\ln x$ 求导, 得 $y'=\frac{1}{x}$,

所以曲线 $y=\ln x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$.

由题意可知, 点 $(a, 2)$ 在直线 $y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$ 上, 可得 $a=3t-t \ln t$.

令 $f(t)=3t-t \ln t, t \in (0, +\infty)$, 则 $f'(t)=3-\ln t-1=2-\ln t$.

当 $t \in (e^2, +\infty)$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 单调递减, 当 $t \in (0, e^2)$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 单调递增, 所以 $f(t)_{\max}=f(e^2)=e^2$, 且当 $t \in (0, e^3)$ 时, $f(t) > 0$, 当 $t \in (e^3, +\infty)$ 时, $f(t) < 0$, 又直线 $y=a$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点, 所以 a 的取值范围为 $(0, e^2)$.

11. C 【解析】本题考查双曲线的渐近线, 考查数形结合的数学思想.

由题可知 l_1 经过第二、四象限, l_2 经过第一、三象限, 设 l_2 的倾斜角为 θ .

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, 则 $3\theta = \frac{\pi}{4}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{12}$, $\tan \theta = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = 2 - \sqrt{3}$,

即 $\frac{b}{a} = 2 - \sqrt{3}$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 8 - 4\sqrt{3}$.

当 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, $2\theta + \theta = \frac{\pi}{4} + \pi$, 即 $\theta = \frac{5\pi}{12}$, $\tan \theta = \tan(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} + 2$,

即 $\frac{b}{a} = 2 + \sqrt{3}$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 8 + 4\sqrt{3}$.

综上, 双曲线 C 的离心率的平方为 $8 \pm 4\sqrt{3}$.

12. B 【解析】本题考查抽象函数以及函数的性质, 考查逻辑推理的核心素养.

由 $f(x+3)=-f(-x)$, 可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 对称, 又 $f(x)$ 是奇函数, 所以

$f(x+3)=-f(-x)=f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期为 3, 所以 $f(0)=f(3)=f(6)=0, f(2)=f(5)=f(-2)=f(1)=f(4)=0, f(1.5)=-f(1.5)$, 则 $f(1.5)=f(4.5)=0$.

故 $f(x)$ 在 $[0, 6]$ 上的零点个数的最小值为 9. 取 $f(x)=\sin \frac{2\pi x}{3}(1+2\cos \frac{2\pi x}{3})$, 显然满足题意, 且恰好在 $[0, 6]$ 上有 9 个零点.

13. $\frac{1}{4}$ 【解析】本题考查对数的运算, 考查数学运算的核心素养.

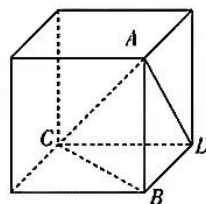
由 $\log_2 3^x = 1$, 可得 $3^x = 2$, 则 $9^{-x} = 3^{-2x} = (3^x)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

14. -1 或 2 【解析】本题考查平面向量, 考查数学运算的核心素养.

因为 $|a-mb|^2 = a^2 - 2ma \cdot b + m^2 b^2 = 3$, 所以 $1-m+m^2=3$, 解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

15. 3π 【解析】本题考查三棱锥的外接球,考查直观想象的核心素养.

在 $\triangle ABD$ 中, $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos A = 1$, 则 $BD = 1$, 且 $AB^2 + BD^2 = AD^2$, 则 $AB \perp BD$. 由题可知, 当平面 $ABD \perp$ 平面 BCD 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大. 如图, 可将三棱锥 $A-BCD$ 补全为正方体, 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故其外接球的表面积为 3π .



16. 2^{17} 【解析】本题考查数列的递推关系,考查逻辑推理的核心素养.

设经过 n 小时, 有 a_n 个正常细菌, b_n 个非正常细菌, 则 $a_{n+1} = 2a_n$, $b_{n+1} = a_n + 2b_n$.

又 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, 所以 $a_n = 2^n$, $b_{n+1} = 2b_n + 2^n$, 则 $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{b_n}{2^n} + \frac{1}{2}$, $\frac{b_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}$,

所以 $b_n = n \cdot 2^{n-1}$, 所以 $a_{14} + b_{14} = 2^{14} + 14 \times 2^{13} = 16 \times 2^{13} = 2^{17}$.

17. 解: (1) 将这 20 个数据从小到大排列, 第 10 个数和第 11 个数都是 77, 所以 $m = 77$ 4 分

估计甲每次训练投篮次数超过 m 的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 6 分

(2) 这 20 次投篮次数的平均数 $\bar{x} = \frac{12}{20}x_1 + \frac{8}{20}x_2 = \frac{3 \times 80 + 2 \times 75}{5} = 78$, ... 9 分

方差 $s^2 = \frac{1^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 + 7^2 + 15^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 7^2 + 5^2 + 7^2 + 5^2}{20}$

$= 33$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问共 6 分, 正确算出 m 的值得 4 分, 正确估计甲每次训练投篮次数超过 m 的概率得 2 分.

【2】第(2)问共 6 分, 正确算出 $\bar{x}$ 得 3 分, 正确算出 s^2 得 3 分.

18. (1) 解: 由 $(a - \sqrt{2}b) \cos C = c(\sqrt{2} \cos B - \cos A)$,

可得 $a \cos C + c \cos A = \sqrt{2}(b \cos C + c \cos B)$, ... 1 分

所以 $\sin A \cos C + \sin C \cos A = \sqrt{2}(\sin B \cos C + \sin C \cos B)$, ... 3 分

所以 $\sin B = \sqrt{2} \sin A$, ... 4 分

则 $b = \sqrt{2}a$, 即 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ 5 分

(2) 证明: 由 $b = \sqrt{2}a$, 可得 $\sin B = \sqrt{2} \sin A$ 6 分

又 $B = 2C$, 所以 $\sin 2C = \sqrt{2} \sin 3C$, $\sin 2C = \sqrt{2} \sin 2C \cos C + \sqrt{2} \cos 2C \sin C$, ... 8 分

$2 \cos C = 2\sqrt{2} \cos^2 C + \sqrt{2}(2 \cos^2 C - 1)$, ... 10 分

即 $4\sqrt{2} \cos^2 C - 2 \cos C - \sqrt{2} = 0$, 解得 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (负值已舍去), 即 $C = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$

为直角三角形. ... 12 分

评分细则:

第(2)问另解, 因为 $B=2C$, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 所以 $b=2c\cos C$ 7 分

由余弦定理可得 $b=2c \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 8 分

因为 $b=\sqrt{2}a$, 所以 $c^3-3a^2c+2a^3=0$, 即 $(\frac{c}{a})^3-3 \cdot \frac{c}{a}+2=0$, 9 分

所以 $(\frac{c}{a}-1)^2 \cdot (\frac{c}{a}+2)=0$, 解得 $\frac{c}{a}=1$ (负值已舍去). 11 分

因为 $a^2+c^2-b^2=2a^2-2a^2=0$, 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 12 分

19. (1) 证明: 设 O 为 AB 的中点, 连接 CO, B_1O, AB_1, BC_1 .

因为 $CA=CB$, 所以 $AB \perp OC$ 1 分

因为四边形 ABB_1A_1 为菱形, $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABB_1$ 为等边三角形, 则 $AB \perp OB_1$ 2 分

又 $OC \cap OB_1 = O$, 所以 $AB \perp$ 平面 OB_1C 4 分

因为 $B_1C \subset$ 平面 OB_1C , 所以 $AB \perp B_1C$ 5 分

(2) 解: 因为 $AC_1 \perp B_1C, AC_1 \cap AB = A$, 所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 6 分

因为 $BC_1 \subset$ 平面 ABC_1 , 所以 $BC_1 \perp B_1C$, 所以四边形 BCC_1B_1 为菱形, 即 $BC=BB_1=2$
..... 7 分

因为平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $ABC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AB, AB \perp OC$, 所以 $OC \perp$ 平面 ABB_1A_1 9 分

故 $V_{A_1-BCC_1B_1} = 2V_{A_1-CBB_1} = 2V_{C-A_1BB_1} = 2 \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle A_1B_1B} \times OC = 2$ 12 分

评分细则:

若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

20. 解: (1) 由抛物线的定义可知 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 1 分

因为 $|MF| = |MO|$, 所以 $x_M = \frac{p}{4}$ 2 分

因为 $|MF| = \frac{3}{2}$, 所以 $\frac{p}{4} + \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$, 解得 $p=2$, 4 分

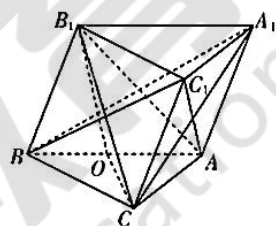
故 C 的方程为 $y^2=4x$ 5 分

(2) 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), l: x=my+t$, 联立方程 $\begin{cases} x=my+t, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $y^2-4my-4t=0$, 则 y_A

$+y_B=4m, y_Ay_B=-4t$ 7 分

因为以 AB 为直径的圆过点 O , 所以 $OA \perp OB$, 则 $x_Ax_B + y_Ay_B = 0$, 即 $\frac{y_A^2}{4} \cdot \frac{y_B^2}{4} + y_Ay_B = 0$,

解得 $y_Ay_B = -16 = -4t$, 所以 $t=4$ 9 分



又 $x_A + x_B = m(y_A + y_B) + 8 = 4m^2 + 8$, 所以 $Q(2m^2 + 4, 2m)$, 10 分
当 $m=0$ 时, $k_{OQ}=0$,

当 $m \neq 0$ 时, $k_{OQ} = \frac{2m}{2m^2 + 4} = \frac{m}{m^2 + 2} = \frac{1}{m + \frac{2}{m}} \in [-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$.

故直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 12 分

评分细则:

【1】第(2)问按标准答案解题时,未说明 $m=0$ 的情况,扣 1 分.

【2】若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

21. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x - a + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - ax + 2}{x}$ 1 分

当 $a \leq 4$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 3 分

当 $a > 4$ 时, 关于 x 的方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $\Delta = a^2 - 16 > 0$, 则 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}$, $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}$ 是方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$ 的两根.

又 $x_1 x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = \frac{a}{2} > 0$, 所以 $0 < x_1 < x_2$.

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}$ 或 $x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4})$ 和 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4},$

$\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4})$ 上单调递减. 5 分

(2) 由 $f(x) \leq e^{ax}$, 可得 $x^2 + 2\ln x \leq e^{ax} + ax$, 即 $e^{\ln x^2} + \ln x^2 \leq e^{ax} + ax$ 7 分

令 $g(x) = e^x + x$, 易知 $g(x)$ 单调递增.

由 $e^{\ln x^2} + \ln x^2 \leq e^{ax} + ax$, 可得 $g(\ln x^2) \leq g(ax)$, 则 $\ln x^2 \leq ax$, 即 $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{a}{2}$ 9 分

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x)_{\max} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$,

所以 $\frac{a}{2} \geq \frac{1}{e}$, 则 a 的取值范围为 $[\frac{2}{e}, +\infty)$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问共 5 分, 求导正确得 1 分, 写出当 $-4 \leq a \leq 4$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得 1 分, 写出当 $a < -4$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得 1 分, 正确写出当 $a > 4$ 时的 $f(x)$ 的单调性, 得 2 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

22. 解: (1) 由直线 $l: \begin{cases} x=t+1, \\ y=\frac{t}{2}-1 \end{cases}$ (t 为参数),

消去参数 t , 可得 l 的普通方程为 $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$ 2 分

由曲线 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$, 可得曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 4 分

(2) l_1 的方程为 $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}-a$, 即 $x-2y-3-2a=0$ 5 分

设点 P 的坐标为 $(2\cos\theta, \sin\theta)$,

则点 P 到直线 l_1 的距离 $d=\frac{|2\cos\theta-2\sin\theta-3-2a|}{\sqrt{5}}=\frac{|2\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})-3-2a|}{\sqrt{5}}$ 7 分

因为 $-3-2a<0$, 所以当 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=1$ 时, d 取得最小值, 9 分

即 $\frac{|2\sqrt{2}-3-2a|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$, 解得 $a=\sqrt{2}$ 10 分

评分细则:

【1】第(1)问中正确写出直线 l 的普通方程得 2 分, 曲线 C 的参数方程不唯一, 正确写出均可得 2 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

23. 解: (1) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=|x+2|+|x-1|=\begin{cases} -2x-1, & x<-2, \\ 3, & -2\leq x<1, \\ 2x+1, & x\geq 1. \end{cases}$ 2 分

当 $x<-2$ 时, $f(x)\leq x+8$ 可化为 $-2x-1\leq x+8$, 解得 $x\geq -3$, 所以 $-3\leq x<-2$; 3 分

当 $-2\leq x<1$ 时, $f(x)\leq x+8$ 可化为 $3\leq x+8$, 解得 $x\geq -5$, 所以 $-2\leq x<1$; 4 分

当 $x\geq 1$ 时, $f(x)\leq x+8$ 可化为 $2x+1\leq x+8$, 解得 $x\leq 7$, 所以 $1\leq x\leq 7$.

综上, 不等式 $f(x)\leq x+8$ 的解集为 $[-3, 7]$ 5 分

(2) 当 $x\in[-4, -2]$ 时, $f(x)\leq 7+x$ 可化为 $-x-2+|x+a|\leq 7+x$, 则 $|x+a|\leq 9+2x$, 7 分

即 $-2x-9\leq x+a\leq 9+2x$, 则 $-3x-9\leq a\leq x+9$ 8 分

因为 $x\in[-4, -2]$, 所以 $3\leq a\leq 5$, 故实数 a 的取值范围为 $[3, 5]$ 10 分

评分细则:

【1】结果未写成集合或者区间的形式, 扣 1 分.

【2】第(2)问共 5 分, 直接代入 $x=-4$, 得出 a 的取值范围扣 3 分.