

2024 届高三数学试题(理科)

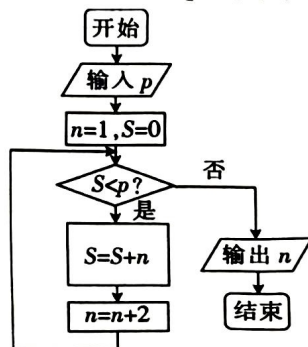
考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $iz + 4\bar{z} - 15 = 0$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知椭圆 $\frac{y^2}{m^2+2} + \frac{x^2}{m^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $m =$
A. $\pm\sqrt{2}$ B. ± 2 C. $\pm 2\sqrt{2}$ D. ± 4
3. 若集合 $A = \{x | \sqrt{x} \leq a\}$, $B = \{x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围为
A. $[0, 1]$ B. $[0, \sqrt{3}]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, \sqrt{3}]$
4. 设 α, β 是两个不同的平面, m, l 是两条不同的直线, 且 $\alpha \cap \beta = l$, 则“ $m \parallel l$ ”是“ $m \parallel \beta$ 且 $m \parallel \alpha$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 充分必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+3y-1 \geq 0, \\ 2x-y-1 \leq 0, \\ y-2 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = y - 4x$ 的最小值为
A. -8 B. -6 C. -4 D. 2
6. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_3 = 2, a_{14} = 8$, 则 $S_{16} =$
A. 140 B. 70 C. 160 D. 80
7. 三人被邀请参加同一个时间段两个晚会, 若两个晚会都必须有人去, 去几人自行决定, 且每人最多参加一个晚会, 则不同的去法有
A. 8 种 B. 12 种 C. 16 种 D. 24 种
8. 执行如图所示的程序框图后, 输出的值为 7, 则 p 的取值范围是



- A. $(4, 9]$ B. $[4, 9)$ C. $(4, 9)$ D. $[4, 9]$

9. 已知函数 $f(x) = 2^{|\sin x| \cos x}$, 现有下列四个结论:

- ① $f(x)$ 是偶函数;
- ② $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数;
- ③ $f(x)$ 在 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减;
- ④ $f(x)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

其中所有正确结论的编号是

- A. ①③ B. ③④ C. ①②④ D. ①③④

10. 设 l_1, l_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a \neq b)$ 的两条渐近线, 若直线 l_1 与直线 $y = x$ 关于直线 l_2 对称, 则双曲线 C 的离心率的平方为

- A. $5 \pm 2\sqrt{3}$ B. $5 \pm 2\sqrt{2}$ C. $8 \pm 4\sqrt{3}$ D. $8 \pm 4\sqrt{2}$

11. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+3) = -f(-x)$, 且 $f(2) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 6]$ 上的零点个数的最小值为

- A. 7 B. 9 C. 10 D. 12

12. 在长方形 $ABCD$ 中, $AB = 6, AD = 1$, 点 E 在线段 AB 上 (不包含端点), 沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起, 使二面角 $A-DE-C$ 的大小为 $\theta, \theta \in (0, \pi)$, 则四棱锥 $A-BCDE$ 体积的最大值为

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 $\log_2 3^x = 1$, 则 $9^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 0 是函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$ 的极大值点, 则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, $OA = 2, OB = 3, OC = 3$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 假设在某种细菌培养过程中, 正常细菌每小时分裂 1 次 (1 个正常细菌分裂成 2 个正常细菌和 1 个非正常细菌), 非正常细菌每小时分裂 1 次 (1 个非正常细菌分裂成 2 个非正常细菌). 若 1 个正常细菌经过 14 小时的培养, 则可分裂成的细菌的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a - \sqrt{2}b) \cos C = c(\sqrt{2} \cos B - \cos A)$.

(1) 求 $\frac{b}{a}$ 的值;

(2) 若 $B = 2C$, 证明: $\triangle ABC$ 为直角三角形.

18. (12 分)

现统计了甲 12 次投篮训练的投篮次数和乙 8 次投篮训练的投篮次数,得到如下数据:

甲	77	73	77	81	85	81	77	85	93	73	77	81
乙	71	81	73	73	71	73	85	73				

已知甲 12 次投篮次数的平均数 $\bar{x}_1 = 80$, 乙 8 次投篮次数的平均数 $\bar{x}_2 = 75$.

(1) 求这 20 次投篮次数的平均数 $\bar{x}$ 与方差 s^2 .

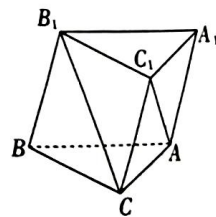
(2) 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 $\frac{4}{5}$, 乙每次投篮的命中率均为 $\frac{3}{4}$. 已知第一次投篮的人是甲, 且甲、乙总共投篮了三次, X 表示甲投篮的次数, 求 X 的分布列与期望.

19. (12 分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, 四边形 ABB_1A_1 为菱形, $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$, $AC_1 \perp B_1C$.

(1) 证明: $BC=BB_1$.

(2) 已知平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $B-CC_1-A$ 的正弦值.



20. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 2\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a > 0$, $f(x) \leq e^x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (12 分)

已知 O 为坐标原点, 经过点 $(4, 0)$ 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B (A, B 异于点 O) 两点, 且以 AB 为直径的圆过点 O .

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 M, N, P 是 C 上的三点, 若 $\triangle MNP$ 为正三角形, Q 为 $\triangle MNP$ 的中心, 求直线 OQ 斜率的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知直线 $l: \begin{cases} x = t + 1, \\ y = \frac{t}{2} - 1 \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(1) 求 l 的普通方程和曲线 C 的参数方程;

(2) 将直线 l 向下平移 $a (a > 0)$ 个单位长度得到直线 l_1 , P 是曲线 C 上的一个动点, 若点 P 到直线 l_1 的距离的最小值为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, 求 a 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x + 2| + |x + a|$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 解不等式 $f(x) \leq x + 8$;

(2) 当 $x \in [-4, -2]$ 时, $f(x) \leq 7 + x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.