

2024 届高三数学试题参考答案(理科)

1. A 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

设 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z}=a-bi(a, b \in \mathbf{R})$.

因为 $iz+4\bar{z}-15=0$, 所以 $i(a+bi)+4(a-bi)-15=4a-b-15+(a-4b)i=0$,

则 $\begin{cases} 4a-b-15=0, \\ a-4b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=4, \\ b=1, \end{cases}$ 即 $z=4+i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(4, 1)$, 位于第一象限.

2. B 【解析】本题考查椭圆的离心率,考查数学运算的核心素养.

由题可知 $a^2=m^2+2, b^2=m^2, c^2=a^2-b^2=2, \frac{2}{m^2+2}=(\frac{\sqrt{3}}{3})^2$, 解得 $m=\pm 2$.

3. D 【解析】本题考查集合间的基本关系,考查逻辑推理的核心素养.

依题意得 $B=\{x|x^2-2x-3 \leq 0\}=[-1, 3]$, 当 $a < 0$ 时, $A=\emptyset$, 符合 $A \subseteq B$,

当 $a \geq 0$ 时, $A=\{x|\sqrt{x} \leq a\}=\{x|0 \leq x \leq a^2\}$, 因为 $A \subseteq B$, 所以 $a^2 \leq 3$, 解得 $0 \leq a \leq \sqrt{3}$.

故 a 的取值范围为 $(-\infty, \sqrt{3}]$.

4. C 【解析】本题考查线与面的位置关系,考查逻辑推理的核心素养.

当 $m \parallel l$ 时, m 可能在 α 内或者 β 内, 故不能推出 $m \parallel \beta$ 且 $m \parallel \alpha$.

当 $m \parallel \beta$ 且 $m \parallel \alpha$ 时, 设存在直线 $n \subset \alpha, n \not\subset \beta$, 且 $n \parallel m$, 因为 $m \parallel \beta$, 所以 $n \parallel \beta$,

根据直线与平面平行的性质定理, 可知 $n \parallel l$, 所以 $m \parallel l$.

故“ $m \parallel l$ ”是“ $m \parallel \beta$ 且 $m \parallel \alpha$ ”的必要不充分条件.

5. C 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

画出可行域知(图略), 当 $l: y-4x=0$ 过点 $(\frac{3}{2}, 2)$ 时, z 取得最小值, 且最小值为 -4 .

6. D 【解析】本题考查等差数列,考查运算求解能力.

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_1+a_{16}=a_3+a_{14}=10$, 故 $S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=80$.

7. B 【解析】本题考查排列组合,考查逻辑推理的核心素养.

第一种情况, 只有两人参加晚会, 有 $A_3^2=6$ 种去法, 第二种情况, 三人参加晚会, 有 $C_3^2 A_2^2=6$ 种去法, 共 12 种去法.

8. A 【解析】本题考查程序框图,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $S < p$ 时, 执行循环体, $S \geq p$ 时, 结束循环, 输出 $n=7$,

所以执行程序框图, $n=1, S=0; S=1, n=3; S=1+3=4, n=5; S=4+5=9, n=7$, 结束循环,

则 p 的取值范围为 $(4, 9]$.

9. D 【解析】本题考查复合函数以及三角函数的图象,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

因为 $f(-x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, ①正确; $f(x+\pi)=2^{|\sin(x+\pi)|\cos(x+\pi)}=2^{-|\sin x|\cos x} \neq$

$f(x)$, ②错误; 当 $x \in [\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 时, $f(x)=2^{|\sin x|\cos x}=2^{-\sin x \cos x}=2^{-\frac{1}{2}\sin 2x}$, 因为 $2x \in [2\pi, \frac{5\pi}{2}]$, 所

以 $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$ 在 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减, 又 $y = 2^x$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减, ③正确; 因为 $f(x+2\pi) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $f(x) = 2^{|\sin x| \cos x} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}\sin 2x}, & x \in [0, \pi], \\ 2^{-\frac{1}{2}\sin 2x}, & x \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的最小值为 $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ④正确. 故选 D.

10. C 【解析】本题考查双曲线的渐近线, 考查数形结合的数学思想.

由题可知 l_1 经过第二、四象限, l_2 经过第一、三象限, 设 l_2 的倾斜角为 θ .

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, 则 $3\theta = \frac{\pi}{4}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{12}$, $\tan \theta = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = 2 - \sqrt{3}$,

即 $\frac{b}{a} = 2 - \sqrt{3}$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 8 - 4\sqrt{3}$.

当 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, $2\theta + \theta - \frac{\pi}{4} = \pi$, 即 $\theta = \frac{5\pi}{12}$, $\tan \theta = \tan(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} + 2$,

即 $\frac{b}{a} = 2 + \sqrt{3}$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 8 + 4\sqrt{3}$.

综上, 双曲线 C 的离心率的平方为 $8 \pm 4\sqrt{3}$.

11. B 【解析】本题考查抽象函数以及函数的性质, 考查逻辑推理的核心素养.

由 $f(x+3) = -f(-x)$, 可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 对称, 又 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x+3) = -f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期为 3, 所以 $f(0) = f(3) = f(6) = 0$, $f(2) = f(5) = f(-2) = f(1) = f(4) = 0$, $f(1.5) = -f(1.5)$, 则 $f(1.5) = f(4.5) = 0$.

故 $f(x)$ 在 $[0, 6]$ 上的零点个数的最小值为 9. 取 $f(x) = \sin \frac{2\pi x}{3} (1 + 2\cos \frac{2\pi x}{3})$, 显然满足题意, 且恰好在 $[0, 6]$ 上有 9 个零点.

12. C 【解析】本题考查四棱锥的体积, 考查空间想象能力以及逻辑推理的核心素养.

设 $\angle ADE = \alpha$, $\alpha \in (0, \angle ADB)$, 则点 A 到 DE 的距离为 $\sin \alpha$, $AE = \tan \alpha$, $BE = 6 - \tan \alpha$, 要使得四棱锥 A-BCDE 的体积最大, 则 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 此时四棱锥 A-BCDE 的体积 $V = \frac{1}{3} \times$

$$\frac{(6+6-\tan \alpha) \times 1}{2} \times \sin \alpha = \frac{1}{6} (12\sin \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}),$$

$$\text{则 } V' = \frac{1}{6} (12\cos \alpha - \frac{2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha}) = \frac{\sin \alpha}{6} (\frac{12}{\tan \alpha} - 2 - \tan^2 \alpha), y = \frac{12}{\tan \alpha} - 2 - \tan^2 \alpha \text{ 在}$$

$(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 且当 $\tan \alpha = 2$ 时, $\frac{12}{\tan \alpha} - 2 - \tan^2 \alpha = 0$.

$$\text{令 } \tan \alpha_0 = 2, \alpha_0 \in (0, \angle ADB), \text{ 则 } \sin \alpha_0 = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以 V 在 $(0, \alpha_0)$ 上单调递增, 在 $(\alpha_0, \angle ADB)$ 上单调递减, $V_{\max} = \frac{1}{6} (12 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}) =$

$$\frac{2\sqrt{5}}{3}, \text{ 即四棱锥 A-BCDE 体积的最大值为 } \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

13. $\frac{1}{4}$ 【解析】本题考查对数的运算, 考查数学运算的核心素养.

由 $\log_2 3^x = 1$, 可得 $3^x = 2$, 则 $9^{-x} = 3^{-2x} = (3^x)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

14. $(-\infty, 0)$ 【解析】本题考查函数的极值点, 考查数学运算的核心素养.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{2a}{3}$.

因为 0 是函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$ 的极大值点, 所以 $-\frac{2a}{3} > 0$, 解得 $a < 0$.

故 a 的取值范围为 $(-\infty, 0)$.

15. -11 【解析】本题考查平面向量, 考查数学运算的核心素养.

因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, 平方可得 $\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + \vec{OC}^2 + 2(\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OB} \cdot \vec{OC}) = 0$, 解得 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -11$.

16. 2^{17} 【解析】本题考查数列的递推关系, 考查逻辑推理的核心素养.

设经过 n 小时, 有 a_n 个正常细菌, b_n 个非正常细菌, 则 $a_{n+1} = 2a_n$, $b_{n+1} = a_n + 2b_n$.

又 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, 所以 $a_n = 2^n$, $b_{n+1} = 2b_n + 2^n$, 则 $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{b_n}{2^n} + \frac{1}{2}$, $\frac{b_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}$,

所以 $b_n = n \cdot 2^{n-1}$, 所以 $a_{14} + b_{14} = 2^{14} + 14 \times 2^{13} = 16 \times 2^{13} = 2^{17}$.

17. (1) 解: 由 $(a - \sqrt{2}b)\cos C = c(\sqrt{2}\cos B - \cos A)$,

可得 $a\cos C + c\cos A = \sqrt{2}(b\cos C + c\cos B)$, 1 分

所以 $\sin A\cos C + \sin C\cos A = \sqrt{2}(\sin B\cos C + \sin C\cos B)$, 3 分

所以 $\sin B = \sqrt{2}\sin A$, 4 分

则 $b = \sqrt{2}a$, 即 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ 5 分

(2) 证明: 由 $b = \sqrt{2}a$, 可得 $\sin B = \sqrt{2}\sin A$ 6 分

又 $B = 2C$, 所以 $\sin 2C = \sqrt{2}\sin 3C$, $\sin 2C = \sqrt{2}\sin 2C\cos C + \sqrt{2}\cos 2C\sin C$, 8 分

$2\cos C = 2\sqrt{2}\cos^2 C + \sqrt{2}(2\cos^2 C - 1)$, 10 分

即 $4\sqrt{2}\cos^2 C - 2\cos C - \sqrt{2} = 0$, 解得 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (负值已舍去), 即 $C = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$

为直角三角形. 12 分

评分细则:

第(2)问另解, 因为 $B = 2C$, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 所以 $b = 2c\cos C$ 7 分

由余弦定理可得 $b = 2c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 8 分

因为 $b = \sqrt{2}a$, 所以 $c^3 - 3a^2c + 2a^3 = 0$, 即 $(\frac{c}{a})^3 - 3 \cdot \frac{c}{a} + 2 = 0$, 9 分

所以 $(\frac{c}{a} - 1)^2 \cdot (\frac{c}{a} + 2) = 0$, 解得 $\frac{c}{a} = 1$ (负值已舍去). 11 分

因为 $a^2 + c^2 - b^2 = 2a^2 - 2a^2 = 0$, 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 12 分

18. 解: (1) 这 20 次投篮次数的平均数 $\bar{x} = \frac{12}{20}\bar{x}_1 + \frac{8}{20}\bar{x}_2 = \frac{3 \times 80 + 2 \times 75}{5} = 78$, 3 分

$$\text{方差 } s^2 = \frac{1^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 + 7^2 + 15^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 7^2 + 5^2 + 7^2 + 5^2}{20} = 33.$$

..... 6 分

(2) X 的可能取值为 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{20}, \quad \text{..... 7 分}$$

$$P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{21}{100}, \quad \text{..... 8 分}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times 1 = \frac{16}{25}, \quad \text{..... 9 分}$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{16}{25}$

..... 10 分

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{20} + 2 \times \frac{21}{100} + 3 \times \frac{16}{25} = \frac{249}{100}. \quad \text{..... 12 分}$$

评分细则:

【1】第(1)问共 6 分, 正确算出 $\bar{x}$ 得 3 分, 正确算出 s^2 得 3 分.

【2】第(2)问共 6 分, 正确列出分布列可得 4 分, 正确写出 $E(X)$ 得 2 分.

19. (1) 证明: 设 O 为 AB 的中点, 连接 CO, B_1O, AB_1, BC_1 .

因为 $CA=CB$, 所以 $AB \perp OC$ 1 分

因为四边形 ABB_1A_1 为菱形, $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABB_1$ 为等边三角形, 则 $AB \perp OB_1$

..... 2 分

又 $OC \cap OB_1 = O$, 所以 $AB \perp$ 平面 OB_1C 3 分

因为 $B_1C \subset$ 平面 OB_1C , 所以 $AB \perp B_1C$ 4 分

因为 $AC_1 \perp B_1C, AC_1 \cap AB = A$, 所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 5 分

因为 $BC_1 \subset$ 平面 ABC_1 , 所以 $BC_1 \perp B_1C$, 所以四边形 BCC_1B_1 为菱形, 即 $BC = BB_1$

..... 6 分

(2) 解: 因为平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $ABC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AB, AB \perp OB_1$,

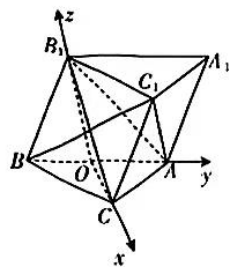
所以 $B_1O \perp$ 平面 ABC 7 分

以 O 为坐标原点, OC, OA, OB_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 设 $AB=2$,

则 $O(0, 0, 0), C(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, -1, 0), B_1(0, 0, \sqrt{3}), A(0, 1, 0)$,

可得 $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, -1, 0), \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, 1, 0)$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CC_1} = y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$



令 $x=1$, 则 $y=-\sqrt{3}, z=1$, 可得 $m=(1, -\sqrt{3}, 1)$ 8 分

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $n=(a, b, c)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}a - b = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{CC_1} = b + \sqrt{3}c = 0, \end{cases}$

令 $a=1$, 则 $b=\sqrt{3}, c=-1$, 可得 $n=(1, \sqrt{3}, -1)$ 10 分

$|\cos \langle m, n \rangle| = \left| \frac{m \cdot n}{|m||n|} \right| = \frac{3}{5}$, 故二面角 $B-CC_1-A$ 的正弦值为 $\frac{4}{5}$ 12 分

评分细则:

【1】第(2)问, 未证明 $B_1O \perp$ 平面 ABC , 直接建系扣 1 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

20. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x - a + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - ax + 2}{x}$ 1 分

当 $a \leq 4$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 3 分

当 $a > 4$ 时, 关于 x 的方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $\Delta = a^2 - 16 > 0$, 则 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}$, $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}$ 是方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$ 的两根.

又 $x_1 x_2 = 1, x_1 + x_2 = \frac{a}{2} > 0$, 所以 $0 < x_1 < x_2$.

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}$ 或 $x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4})$ 和 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4},$

$\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4})$ 上单调递减. 5 分

(2) 由 $f(x) \leq e^{ax}$, 可得 $x^2 + 2 \ln x \leq e^{ax} + ax$, 即 $e^{\ln x^2} + \ln x^2 \leq e^{ax} + ax$ 7 分

令 $g(x) = e^x + x$, 易知 $g(x)$ 单调递增.

由 $e^{\ln x^2} + \ln x^2 \leq e^{ax} + ax$, 可得 $g(\ln x^2) \leq g(ax)$, 则 $\ln x^2 \leq ax$, 即 $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{a}{2}$ 9 分

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x)_{\max} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$,

所以 $\frac{a}{2} \geq \frac{1}{e}$, 则 a 的取值范围为 $[\frac{2}{e}, +\infty)$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问共 5 分, 求导正确得 1 分, 写出当 $-4 \leq a \leq 4$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得 1 分, 写出当 $a < -4$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得 1 分, 正确写出当 $a > 4$ 时的 $f(x)$ 的单调性, 得 2 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

21. 解: (1) 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), l: x=my+4$, 联立方程 $\begin{cases} x=my+4, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-8p=0$,

则 $y_A+y_B=2pm, y_Ay_B=-8p$ 2 分

因为以 AB 为直径的圆过点 O , 所以 $OA \perp OB$, 则 $x_Ax_B+y_Ay_B=0$, 即 $\frac{y_A^2}{2p} \cdot \frac{y_B^2}{2p} + y_Ay_B=0$,

解得 $y_Ay_B=-4p^2$, 4 分

所以 $-4p^2=-8p$, 解得 $p=2$, 所以 C 的方程为 $y^2=4x$ 5 分

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), P(x_3, y_3)$. 不妨设 N, M, P 按逆时针顺序排列.

① 当 $\triangle MNP$ 有一边斜率不存在时, 另一顶点为 $(0, 0)$, 不妨设 $P(0, 0)$,

则 $l_{MP}: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, l_{NP}: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

与抛物线 C 的方程联立得 $M(12, 4\sqrt{3}), N(12, -4\sqrt{3})$, 中心 $Q(8, 0)$ 6 分

② 当 $\triangle MNP$ 三边的斜率都存在时, $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}, k_{MP}=\frac{4}{y_1+y_3}$.

又 $\angle NMP=60^\circ$, 所以 $\frac{\frac{4}{y_1+y_2}-\frac{4}{y_1+y_3}}{1+\frac{4}{y_1+y_2} \cdot \frac{4}{y_1+y_3}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$,

化简可得 $4(y_3-y_2)=\sqrt{3}[(y_1+y_2)(y_1+y_3)+16]$, 8 分

同理可得 $4(y_2-y_1)=\sqrt{3}[(y_3+y_1)(y_3+y_2)+16]$,

$4(y_1-y_3)=\sqrt{3}[(y_2+y_3)(y_2+y_1)+16]$,

三式相加得 $0=\sqrt{3}[y_1^2+y_2^2+y_3^2+3(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)+48]$.

因为 M, N, P 是 C 上的三点, 所以 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=4(x_1+x_2+x_3)$,

又 $(y_1+y_2+y_3)^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)$,

所以 $3(y_1+y_2+y_3)^2+96=4(x_1+x_2+x_3)$ 9 分

设 $Q(x, y)$, 则 $3x=x_1+x_2+x_3, 3y=y_1+y_2+y_3$, 代入上式得 $9y^2=4x-32$.

又 ① 也满足 $9y^2=4x-32$, 所以 Q 的轨迹方程为 $9y^2=4x-32$ 10 分

当 $y>0$ 时, 直线 OQ 的斜率为 $\frac{y}{x}=\frac{4y}{9y^2+32}=\frac{4}{9y+\frac{32}{y}} \leq \frac{\sqrt{2}}{12}$, 当且仅当 $y=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时, 直线 OQ

的斜率取得最大值 $\frac{\sqrt{2}}{12}$. 当 $y \leq 0$ 时, 直线 OQ 的斜率 $\frac{y}{x} \leq 0$. 综上, 直线 OQ 斜率的最大值为

$\frac{\sqrt{2}}{12}$ 12 分

评分细则:

【1】第(2)问按标准答案解题时, 未说明 $\triangle MNP$ 有一边斜率不存在的情况, 扣 1 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

22. 解: (1) 由直线 $l: \begin{cases} x=t+1, \\ y=\frac{t}{2}-1 \end{cases}$ (t 为参数),

消去参数 t , 可得 l 的普通方程为 $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ 2 分

由曲线 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 可得曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数). 4 分

(2) l_1 的方程为 $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} - a$, 即 $x - 2y - 3 - 2a = 0$ 5 分

设点 P 的坐标为 $(2\cos \theta, \sin \theta)$,

则点 P 到直线 l_1 的距离 $d = \frac{|2\cos \theta - 2\sin \theta - 3 - 2a|}{\sqrt{5}} = \frac{|2\sqrt{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) - 3 - 2a|}{\sqrt{5}}$

..... 7 分

因为 $-3 - 2a < 0$, 所以当 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ 时, d 取得最小值, 9 分

即 $\frac{|2\sqrt{2} - 3 - 2a|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 解得 $a = \sqrt{2}$ 10 分

评分细则:

【1】第(1)问中正确写出直线 l 的普通方程得 2 分, 曲线 C 的参数方程不唯一, 正确写出均可得 2 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

23. 解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = |x+2| + |x-1| = \begin{cases} -2x-1, & x < -2, \\ 3, & -2 \leq x < 1, \\ 2x+1, & x \geq 1. \end{cases}$ 2 分

当 $x < -2$ 时, $f(x) \leq x+8$ 可化为 $-2x-1 \leq x+8$, 解得 $x \geq -3$, 所以 $-3 \leq x < -2$; 3 分

当 $-2 \leq x < 1$ 时, $f(x) \leq x+8$ 可化为 $3 \leq x+8$, 解得 $x \geq -5$, 所以 $-2 \leq x < 1$; 4 分

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq x+8$ 可化为 $2x+1 \leq x+8$, 解得 $x \leq 7$, 所以 $1 \leq x \leq 7$.

综上, 不等式 $f(x) \leq x+8$ 的解集为 $[-3, 7]$ 5 分

(2) 当 $x \in [-4, -2]$ 时, $f(x) \leq 7+x$ 可化为 $-x-2 + |x+a| \leq 7+x$, 则 $|x+a| \leq 9+2x$, 7 分

即 $-2x-9 \leq x+a \leq 9+2x$, 则 $-3x-9 \leq a \leq x+9$ 8 分

因为 $x \in [-4, -2]$, 所以 $3 \leq a \leq 5$, 故实数 a 的取值范围为 $[3, 5]$ 10 分

评分细则:

【1】结果未写成集合或者区间的形式, 扣 1 分.

【2】第(2)问共 5 分, 直接代入 $x = -4$, 得出 a 的取值范围扣 3 分.