

成都石室中学高 2024 届高考适应性考试(一)  
文科数学参考答案

双向细目表

| 内容板块     | 具体内容          | 题型  | 题号 | 分值  | 难度<br>预估 | 能力层次 |    |    | 权重比例          |
|----------|---------------|-----|----|-----|----------|------|----|----|---------------|
|          |               |     |    |     |          | 了解   | 理解 | 掌握 |               |
| 数与代数     | 集合的概念与运算      | 选择题 | 1  | 5   | 0.9      |      | ✓  |    | 79 分<br>(53%) |
|          | 复数的概念与运算      | 选择题 | 2  | 5   | 0.85     |      | ✓  |    |               |
|          | 简易逻辑          | 选择题 | 3  | 5   | 0.85     |      | ✓  |    |               |
|          | 二进制           | 选择题 | 4  | 5   | 0.85     |      | ✓  |    |               |
|          | 函数图象          | 选择题 | 5  | 5   | 0.65     |      |    | ✓  |               |
|          | 线性规划          | 选择题 | 8  | 5   | 0.5      |      |    | ✓  |               |
|          | 解三角形          | 选择题 | 10 | 5   | 0.6      |      |    | ✓  |               |
|          | 数列与函数同构       | 填空题 | 16 | 5   | 0.3      |      | ✓  |    |               |
|          | 函数导数解决恒成立     | 选择题 | 12 | 5   | 0.5      |      |    | ✓  |               |
|          | 函数定义域         | 填空题 | 13 | 5   | 0.9      |      | ✓  |    |               |
|          | 三角函数图象性质      | 填空题 | 14 | 5   | 0.8      |      |    | ✓  |               |
|          | 数列奇偶项问题       | 解答题 | 19 | 12  | 0.7      |      |    | ✓  |               |
|          | 函数导数的综合应用     | 解答题 | 21 | 12  | 0.5      |      |    |    |               |
| 解析几何     | 双曲线的定义与角平分线定理 | 填空题 | 15 | 5   | 0.7      |      |    | ✓  | 22 分<br>(15%) |
|          | 抛物线的基本性质      | 选择题 | 7  | 5   | 0.8      |      | ✓  |    |               |
|          | 直线与抛物线的综合应用   | 解答题 | 20 | 12  | 0.6      |      |    | ✓  |               |
| 立体几何     | 立体几何新定义       | 选择题 | 9  | 5   | 0.6      |      |    | ✓  | 22 分<br>(15%) |
|          | 三棱锥的外接球       | 选择题 | 11 | 5   | 0.5      |      |    | ✓  |               |
|          | 三棱锥体积         | 解答题 | 17 | 12  | 0.8      |      |    | ✓  |               |
| 概率/算法/统计 | 几何概型          | 选择题 | 6  | 5   | 0.9      |      | ✓  |    | 17 分<br>(11%) |
|          | 独立事件的概率       | 解答题 | 18 | 12  | 0.7      |      |    | ✓  |               |
| 选考内容     | 直线与双曲线的极坐标方程  | 解答题 | 22 | 10  | 0.8      |      | ✓  |    | 10 分<br>(6%)  |
|          | 绝对值不等式与柯西不等式  | 解答题 | 23 | 10  | 0.8      |      | ✓  |    |               |
| 统计百分比    |               |     |    | 150 | 0.70     |      |    |    |               |

## 答案及解析

1.【答案】D 【解析】当  $B=\emptyset$  时,  $a=0$ ; 当  $B\neq\emptyset$  时,  $a=\pm 2$ . 故选 D.

2.【答案】D 【解析】因为  $z=\frac{-2+ai}{1-i}=\frac{(-2+ai)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-2-a+(a-2)i}{2}$  在复平面上对应的点位于虚

轴上, 所以  $\begin{cases} -2-a=0, \\ a-2\neq 0, \end{cases}$  即  $a=-2$ . 故选 D.

3.【答案】B 【解析】对于 A, 若  $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ , 则不能推出  $a>b>0$ ; 若  $a>b>0$ , 则必定有  $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ , 所以既不是充分条件也不是必要条件, 故 A 错误. 对于 B, 若  $\ln(a+1)>\ln(b+1)$ , 则根据对数函数的单调性可知  $a+1>b+1>0\Rightarrow a>b>-1$ , 但不能推出  $a>b>0$ , 但是  $a>b>0\Rightarrow a>b>-1$ , 故 B 正确. 对于 C, 因为  $a^3>b^3>0$  等价于  $a>b>0$ , 所以是充分必要条件, 故 C 错误. 对于 D, 若  $\sqrt{a-1}>\sqrt{b-1}$ , 则必有  $a>b\geq 1>0$ , 所以是充分不必要条件, 故 D 错误. 故选 B.

4.【答案】B 【解析】据条件可得, 符号为“”表示的二进制数为 100010, 则其表示的十进制数是  $0\times 2^0+1\times 2^1+0\times 2^2+0\times 2^3+0\times 2^4+1\times 2^5=34$ . 故选 B.

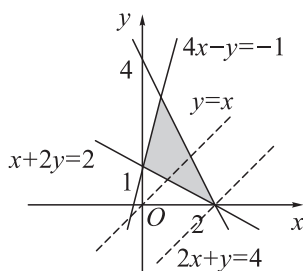
5.【答案】B 【解析】因为  $f(x)=(x+1)\ln|x-1|$ , 所以  $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}>0$ , 故排除 C, D; 当  $x>2$  时,  $f(x)=(x+1)\ln(x-1)>0$  恒成立, 排除 A. 故选 B.

6.【答案】A 【解析】设函数  $f(x)=2x-\sin x$ , 则  $f'(x)=2-\cos x>0$ , 所以  $f(x)$  为递增函数, 且  $f(0)=0$ , 所以当  $x>0$  时,  $f(x)>f(0)=0$ ; 当  $x\leq 0$  时,  $f(x)\leq f(0)=0$ , 所以不等式  $2x\leq \sin x$  的解集为  $(-\infty, 0]$ . 又因为  $x\in[-2, 4]$ , 所以不等式  $2x\leq \sin x$  的解集为  $[-2, 0]$ . 由长度比的几何概型的概率计算可得, 使  $2x\leq \sin x$  恒成立的概率是  $P=\frac{0-(-2)}{4-(-2)}=\frac{1}{3}$ . 故选 A.

7.【答案】C 【解析】由题易知,  $PF$  的倾斜角为  $120^\circ$ , 从而  $|PQ|=|PF|=\frac{p}{1-\cos 120^\circ}=\frac{2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$ . 故选 C.

8.【答案】B 【解析】不等式组  $\begin{cases} x+2y\geq 2, \\ 2x+y\leq 4, \\ 4x-y\geq -1 \end{cases}$  表示的平面区域如图中阴影部分所示, 三个交点的坐标分别

为  $(0, 1)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ ,  $(2, 0)$ , 目标函数  $z=|x|+|y-3|=x-y+3$ , 即  $y=x+3-z$ , 当目标函数过点  $(2, 0)$  时  $z$  取得最大值为 5, 过点  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$  时  $z$  取得最小值为  $\frac{1}{2}$ , 所以目标函数  $z=|x|+|y-3|$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ . 故选 B.



9.【答案】B 【解析】由条件可知,上底面长 18 米、宽 8 米,中截面长 19 米、宽 9 米,则上底面面积  $S = 18 \times 8 = 144$  (平方米),中截面面积  $S_0 = 19 \times 9 = 171$  (平方米),下底面面积  $S' = 20 \times 10 = 200$  (平方米),

所以这堆建筑材料的体积  $V = \frac{1}{6} \times 1 \times (144 + 4 \times 171 + 200) = \frac{514}{3}$  (立方米),所以这堆建筑材料约重

$\frac{514}{3} \times 1.5 = 257$  (吨),需要的卡车次为  $257 \div 5 = 51.4$ ,所以至少需要运 52 车. 故选 B.

10.【答案】C 【解析】在  $\triangle ABC$  中,由  $B = 2C, A = \pi - B - C = \pi - 3C, c = 2$  及正弦定理,得  $a + b =$

$$\frac{2(\sin 3C + \sin 2C)}{\sin C} = 2(4\cos^2 C + 2\cos C - 1). \text{ 又 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形,所以 } 0 < B < \frac{\pi}{2}, 0 < A < \frac{\pi}{2}, \text{ 即}$$

$$0 < 2C < \frac{\pi}{2}, 0 < \pi - 3C < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } a + b \in (2 + 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{3}). \text{ 故选 C.}$$

11.【答案】A 【解析】如图 1,连接  $AC$  交  $BD$  于点  $E$ ,不妨设菱形  $ABCD$  的边长为  $a$ ,则  $AE = CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

将菱形  $ABCD$  沿对角线  $BD$  折起,如图 2 所示, $O_1, O_2$  分别为正  $\triangle ABD, \triangle CBD$  的中心,过点  $O_1, O_2$

分别作平面  $ABD$  和平面  $CBD$  的垂线交于点  $O$ ,则  $O_1E = O_2E = \frac{\sqrt{3}}{6}a, AO_1 = CO_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ . 在等腰

$\triangle AEC$  中, $AE = CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a, AC = 3\sqrt{3}$ ,且  $BD \perp$  平面  $AEC$ ,则  $V_{A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle AEC} \cdot BD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times$

$$3\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot a = \frac{9}{2}, \text{ 所以 } a^4 - 9a^2 - 36 = 0, \text{ 即 } a^2 = 12 (a^2 = -3 \text{ 舍去}), \text{ 得 } a = 2\sqrt{3}.$$

在  $\triangle AEC$  中,由余弦定理,得  $\angle AEC = \frac{2\pi}{3}$ ,则在直角  $\triangle OO_1E$  中, $\angle O_1OE = \frac{\pi}{6}$ ,所以  $OO_1 = \sqrt{3}O_1E =$

$\sqrt{3}$ . 设三棱锥  $A-BCD$  外接球的半径为  $R$ ,则  $R^2 = OO_1^2 + AO_1^2 = 7$ ,故外接球的表面积为  $4\pi R^2 = 28\pi$ .

故选 A.

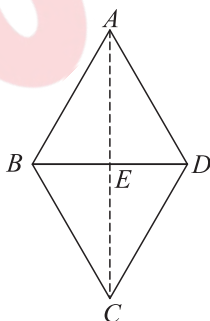


图 1

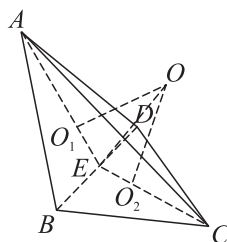


图 2

12. 【答案】B 【解析】令  $y=f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ , 整理得  $(x-2)^2+y^2=1 (y\geq 0)$ , 即点  $M$  在圆心为  $(2,0)$ , 半径为 1 的半圆上.  $g(x)=e^{x+\ln(ax)}-[1+x+\ln(ax)]+x+1\geq x+1$ , 当且仅当  $x+\ln(ax)=0$  时等号成立, 所以曲线  $g(x)$  的一条切线为  $y=x+1$ . 通过数形结合可知, 当  $M, N$  分别为对应切点, 且  $MN$  与两切线垂直时,  $|MN|$  取得最小值, 即  $|MN|$  的最小值为圆心  $(2,0)$  到直线  $y=x+1$  的距离减去半径, 即  $|MN|$  的最小值为  $\frac{|2-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}-1=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$ . 过圆心  $(2,0)$  与  $y=x+1$  垂直的直线方程为  $y=-x+2$ , 与直线  $y=x+1$  平行的函数  $f(x)$  的切线方程为  $y=x-2+\sqrt{2}$ . 设  $M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$ ,

$$\text{所以当且仅当} \begin{cases} y_M = -x_M + 2, \\ y_M = x_M - 2 + \sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_N + \ln(ax_N) = 0, \\ y_N = -x_N + 2, \\ y_N = x_N + 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_M = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_M = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_N = \frac{1}{2}, \\ y_N = \frac{3}{2}, \\ a = 2e^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \text{时, } |MN| \text{ 取到最小}$$

值. 综上所述,  $|MN| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$ . 故选 B.

13. 【答案】 $[-1, 2)$  【解析】由题意, 得  $x+1 \geq 0$  且  $2-x > 0$ , 即  $-1 \leq x < 2$ .

14. 【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  【解析】因为  $f(x)=a\sin x+\cos x=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\varphi)$  的周期  $T=2\pi$  且直线  $x=-\frac{\pi}{6}$  为对称轴, 所以点  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  为  $f(x)$  的对称中心, 所以  $f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}=0$ , 解得  $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

15. 【答案】2 【解析】设  $\frac{|PI|}{|IQ|}=\lambda$ , 则  $\frac{|PF_1|}{|F_1Q|}=\frac{|PF_2|}{|F_2Q|}=\lambda$ , 所以  $\begin{cases} |PF_1|=\lambda|F_1Q|, \\ |PF_2|=\lambda|F_2Q|. \end{cases}$  又因为

$$\begin{cases} |PF_2|-|PF_1|=2a, \\ |F_1Q|+|F_2Q|=2c, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} |PF_1|=\lambda c-a, \\ |PF_2|=\lambda c+a. \end{cases} \text{ 在 } \triangle PF_1F_2 \text{ 中, 由余弦定理, 得 } |PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle PF_1F_2, \text{ 即 } (\lambda c+a)^2=(\lambda c-a)^2+(2c)^2-2(\lambda c-a)\cdot 2c\cdot$$

$$(-\frac{1}{2}), \text{ 所以 } (4\lambda+2)e=(4+2\lambda)e^2, \text{ 即 } 2\lambda+1=(2+\lambda)e. \text{ 又因为 } e=\frac{5}{4}, \text{ 所以 } \lambda=2.$$

16. 【答案】-2 【解析】因为  $f'(x)=\frac{\frac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$ , 所以令  $u(x)=\frac{x+1}{x}-\ln x=1+\frac{1}{x}-\ln x$ , 则  $u(x)$  在

$(0, +\infty)$  上单调递减, 且  $u(2)=\frac{3}{2}-\ln 2>0, u(e^2)=\frac{1}{e^2}-1<0$ . 由零点存在定理可知, 存在唯一的

$x_0 \in (2, e^2)$ , 使得  $u(x_0)=0$ , 即  $\frac{x_0+1}{x_0}=\ln x_0$ , 即  $\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0+1}=f(x_0)$  ①, 所以  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递

增, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减. 由  $\ln a_{n+1}=a_n+1$ , 得  $\ln a_4=a_3+1, \ln a_3=a_2+1, \ln a_2=a_1+1$ . 又

$\ln a_4=(1+a_2)x_0$ , 得  $\frac{1}{x_0}=\frac{a_2+1}{\ln a_4}=\frac{\ln a_3}{a_3+1}=f(a_3)$  ②. 由 ①② 可知,  $\frac{1}{x_0}=f(x_0)=f(a_3)$ , 则  $a_3=x_0$ , 所



以  $a_2 + 1 = \ln a_3 = \ln x_0$ , 即  $a_2 = \ln x_0 - 1 = \frac{1}{x_0}$ , 所以  $a_1 + 1 = \ln a_2 = -\ln x_0$ , 所以  $(a_2 + 1) + (a_1 + 1) = 0$ , 即  $a_1 + a_2 = -2$ .

17. 解: (1) 如图, 设  $AC$  的中点为  $N$ , 连接  $MN, BN$ .

因为  $M, N$  分别是  $PC, AC$  的中点,

所以  $MN = \frac{1}{2}PA = 2, MC = \frac{1}{2}PC = \frac{5}{2}, MN \parallel PA$ ,

所以  $\angle BMN$  是异面直线  $BM$  与  $PA$  所成角或其补角.

在  $\triangle BPC$  中,  $\cos \angle BCP = \frac{BC^2 + PC^2 - PB^2}{2 \cdot BC \cdot PC} = \frac{4^2 + 5^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{2}{5}$ .

在  $\triangle BCM$  中,  $BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2 \cdot BC \cdot MC \cdot \cos \angle BCP = 4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times 4 \times \frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{57}{4}$ ,

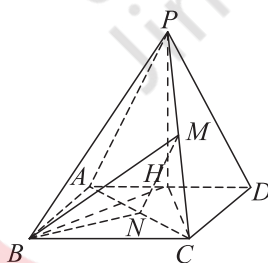
所以  $BM = \frac{\sqrt{57}}{2}$ .

在  $\triangle ABC$  中, 因为  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ , 所以  $AB \perp BC$ ,

所以  $BN = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$ .

在  $\triangle BMN$  中,  $\cos \angle BMN = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2 \cdot BM \cdot MN} = \frac{\frac{57}{4} + 2^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{57}}{2} \times 2} = \frac{6}{\sqrt{57}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}$ ,

所以  $BM$  与  $PA$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{57}}{19}$ . ..... 5 分



(2) 因为  $AD \parallel BC, AD = BC$ ,

所以四边形  $ABCD$  是平行四边形.

又由(1)知  $AB \perp BC$ , 即  $\angle ABC = 90^\circ$ ,

所以四边形  $ABCD$  是长方形,

则  $CD = AB = 3, CD \parallel AB, AB \perp AD, CD \perp AD$ .

因为  $AB^2 + AP^2 = BP^2$ ,

所以  $AB \perp AP$ .

又因为  $AD \cap AP = A, AD, AP \subset \text{平面 } PAD$ ,

所以  $AB \perp \text{平面 } PAD$ .

又因为  $AB \subset \text{平面 } ABCD$ ,

所以平面  $ABCD \perp \text{平面 } PAD$ .

如图,过点  $P$  作  $PH \perp AD$ ,垂足为  $H$ ,连接  $HB, HC$ .

因为平面  $ABCD \perp \text{平面 } PAD$ ,平面  $ABCD \cap \text{平面 } PAD = AD, PH \subset \text{平面 } PAD$ ,

所以  $PH \perp \text{平面 } ABCD$ .

又因为  $HB, HC \subset \text{平面 } ABCD$ ,

所以  $PH \perp HB, PH \perp HC$ .

又因为  $PB = PC$ ,所以  $HB = HC$ .

又因为  $AB \perp AD, CD \perp AD, AB = CD$ ,

所以  $AH = DH$ ,

即  $H$  是  $AD$  的中点.

因为  $CD \parallel AB, AB \perp \text{平面 } PAD$ ,

所以  $CD \perp \text{平面 } PAD$ ,

所以  $CD \perp PD$ ,

所以  $PD^2 = PC^2 - CD^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ ,所以  $PD = 4$ ,

所以  $PA = AD = PD$ ,

所以  $\triangle PAD$  为等边三角形,

所以  $PH = 2\sqrt{3}$ ,

所以  $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ,

即三棱锥  $P-ABC$  的体积为  $4\sqrt{3}$ . ..... 12 分

18. 解:(1)设“甲回答问题且得分”为事件  $A$ ,“甲回答问题但对方得分”为事件  $\bar{A}$ ,“乙回答问题且得分”为事件  $B$ ,“乙回答问题但对方得分”为事件  $\bar{B}$ .

记“前三个问题回答结束后乙获胜”为事件  $C$ .

前三个问题回答的情况有 8 种:  $AAA, AA\bar{A}, A\bar{A}B, A\bar{A}\bar{B}, \bar{A}BB, \bar{A}B\bar{B}, \bar{A}\bar{B}A, \bar{A}\bar{B}\bar{A}$ ,

其中事件  $C$  只包含了 1 种情况,即  $\bar{A}BB$ ,

所以  $P(C) = P(\bar{A}BB) = \frac{1}{8}$ ,

即前三个问题回答结束后乙获胜的概率为  $\frac{1}{8}$ . ..... 6 分

(2)记“甲同学连续回答了三次问题且获胜”为事件  $D$ .

由(1)可得,  $P(D) = P(AAA) + P(AA\bar{A}\bar{B}) + P(AA\bar{A}B\bar{B}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$ ,

即甲同学连续回答了三次问题且获胜的概率为  $\frac{7}{32}$ . ..... 12 分

19. 解：(1)由已知，得  $a_4 = 2a_2 + 1 = 3$ ,  $a_6 = 2a_4 + 1 = 7$ . ..... 2 分

当  $n \geq 3$  且  $n$  为偶数时,  $a_n = 2a_{n-2} + 1$ ,

即  $a_n + 1 = 2(a_{n-2} + 1)$ .

又  $a_2 + 1 = 2$ ,

所以当  $n$  为偶数时, 数列  $\{a_n + 1\}$  是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列. .... 5 分

(2)由(1)可知, 当  $n$  为偶数时,  $a_n + 1 = 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$ , 即  $a_n = 2^{\frac{n}{2}} - 1$ .

当  $n$  为奇数时, 设  $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$ ,

则  $a_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k-1}$

$$= 2^k - 1 + a_{2k-1}$$

$$= 2^k - 1 + a_{2k-2} + a_{2k-3}$$

$$= 2^k - 1 + 2^{k-1} - 1 + a_{2k-3}$$

$$= \dots$$

$$= 2^k - 1 + 2^{k-1} - 1 + \dots + 2^1 - 1 + a_1$$

$$= \frac{2 \cdot (1 - 2^k)}{1 - 2} - k + a_1$$

$$= 2^{k+1} - k - 1,$$

所以当  $n$  为奇数时,  $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} - \frac{n+1}{2}$ ,

所以  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{29} = (2^1 - 1) + (2^2 - 2) + (2^3 - 3) + \dots + (2^{15} - 15)$

$$= \frac{2 \times (1 - 2^{15})}{1 - 2} - \frac{(1 + 15) \times 15}{2}$$

$$= 2^{16} - 122. .... 12 分$$

20. 解：(1)设切点  $M(x_1, \frac{x_1^2}{2p})$ ,  $N(x_2, \frac{x_2^2}{2p})$ ,

则以  $M$  为切点的切线方程为  $y - \frac{x_1^2}{2p} = \frac{x_1}{p}(x - x_1)$ .

因为切线过点  $P(1, -1)$ ,

所以  $x_1^2 - 2x_1 - 2p = 0$ .

同理,  $x_2^2 - 2x_2 - 2p = 0$ ,

所以  $x_1 + x_2 = 2$ ,  $x_1 x_2 = -2p$ .

又因为  $FM + FN = \frac{x_1^2}{2p} + \frac{p}{2} + \frac{x_2^2}{2p} + \frac{p}{2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{2p} + p = 5$ ,

所以  $p^2 - 3p + 2 = 0$ , 即  $(p - 1)(p - 2) = 0$ .

又因为  $p > 1$ , 所以  $p = 2$ ,

所以抛物线  $E$  的方程为  $x^2 = 4y$ . .... 6 分

(2) 设直线  $l_1$  的方程为  $y+1=k(x-1)$ .

联立直线  $l_1$  和抛物线  $E$  的方程, 得  $\begin{cases} y=kx-(k+1), \\ x^2=4y, \end{cases}$

所以  $x^2-4kx+4(k+1)=0$ .

设  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ ,

则  $x_A+x_B=4k$ .

同理,  $x_C+x_D=-4k$ , ..... 7 分

所以  $k_{AC}+k_{BD}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}+\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}$   
 $=\frac{\frac{x_C^2}{4}-\frac{x_A^2}{4}}{x_C-x_A}+\frac{\frac{x_D^2}{4}-\frac{x_B^2}{4}}{x_D-x_B}$  ..... 8 分

$$=\frac{x_C+x_A}{4}+\frac{x_D+x_B}{4}$$

$$=\frac{(x_A+x_B)+(x_C+x_D)}{4}$$

$=0$ , ..... 11 分

所以  $k_{AC}k_{AB}+k_{BD}k_{AB}=(k_{AC}+k_{BD}) \cdot k_{AB}=0$ ,

所以  $k_{AC}k_{AB}+k_{BD}k_{AB}$  等于定值 0. .... 12 分

21. 解: (1) 当  $a=\sqrt{2}$  时,  $f(x)=e^x+\sin x-3, f'(x)=e^x+\cos x$ .

① 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $e^x \in (0, 1), \sin x \in [-1, 1]$ , 则  $f(x) < 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上无零点.

② 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递增.

又因为  $f(0)=-2 < 0, f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-2 > e^{\ln 2}-2=0$ ,

所以  $\exists x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}], f(x_0)=0$ ,

所以  $f(x)$  在  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  上有一个零点.

③ 当  $x \in (\frac{\pi}{2}, +\infty)$  时,  $f(x) > e^{\frac{\pi}{2}}-1-3 > e^{\ln 4}-4=0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$  上无零点.

综上所述, 当  $a=\sqrt{2}$  时, 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上只有一个零点. .... 5 分

(2) 对任意  $x \geq 0$ , 恒有  $h(x) > 0$ ,

即  $(a^2-1)e^x-x^2+2ax-1 > 0$  恒成立,

即  $\frac{x^2-2ax+1}{e^x} < a^2-1$  恒成立,

即  $\frac{x^2-2ax+1}{e^x} - (a^2-1) < 0$  恒成立.

设  $g(x) = \frac{x^2-2ax+1}{e^x} - (a^2-1), x \in [0, +\infty)$ ,

则  $g'(x) = \frac{-x^2+(2a+2)x-2a-1}{e^x} = \frac{-(x-1)[x-(2a+1)]}{e^x}$ .

①当  $a \leq -\frac{1}{2}$  时,  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以只需  $g(x)_{\max} = g(1) = \frac{2-2a}{e} - (a^2-1) < 0$ ,

即  $(ea+e+2)(a-1) > 0$ ,

解得  $a \in \left(-\infty, -\frac{e+2}{e}\right) \cup (1, +\infty)$ .

又因为  $a \leq -\frac{1}{2}$ ,

所以  $a \in \left(-\infty, -\frac{e+2}{e}\right)$ .

②当  $-\frac{1}{2} < a < 0$  时,  $g(x)$  在  $(0, 2a+1)$  上单调递减, 在  $(2a+1, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以只需  $\begin{cases} g(0) < 0, \\ g(1) < 0. \end{cases}$

由  $g(1) = \frac{2-2a}{e} - (a^2-1) < 0, g(0) = 2-a^2 < 0$ ,

解得  $a \in \left(-\infty, -\frac{e+2}{e}\right) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ , 这与  $-\frac{1}{2} < a < 0$  矛盾, 舍去.

③当  $a=0$  时,  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

所以只需  $g(0) < 0$ , 得  $a^2 > 2$ , 这与  $a=0$  矛盾, 舍去.

④当  $a > 0$  时,  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, 2a+1)$  上单调递增, 在  $(2a+1, +\infty)$  上单调递减,

所以只需  $\begin{cases} g(2a+1) < 0, \\ g(0) < 0. \end{cases}$

因为  $g(2a+1) = \frac{(2a+1)^2-2a(2a+1)+1}{e^{2a+1}} - (a^2-1) = \frac{2a+2}{e^{2a+1}} - (a^2-1) < 0$ , 且  $a+1 > 0$ ,

所以  $a-1 > \frac{2}{e^{2a+1}}$ .

又  $g(0) = 2-a^2 < 0, a > 0$ , 所以  $a > \sqrt{2}$ ,

$$\text{所以 } a-1 > \sqrt{2}-1 > 0, 4 > \frac{2}{2^{\sqrt{2}+1}} > \frac{2}{e^{\sqrt{2}+1}} > \frac{2}{e^{2a+1}},$$

所以  $a \in (\sqrt{2}, +\infty)$  满足条件.

综上所述, 实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{e+2}{e}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ . ..... 12 分

22. 解: (1) 设曲线  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\lambda} = 1$ .

点  $A(6, \frac{5\pi}{3})$  的直角坐标为  $(0, -3\sqrt{3})$ .

将点  $A$  的直角坐标代入曲线  $C$  的方程, 得  $\frac{0^2}{\lambda} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{\lambda} = 1$ ,

所以  $\lambda = -27$ ,

所以曲线  $C$  的普通方程为  $\frac{y^2}{27} - \frac{x^2}{27} = 1$ ,

所以曲线  $C$  在第二象限的一个参数方程为  $\begin{cases} x = 3\sqrt{3} \tan \alpha, \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{\cos \alpha}, \end{cases}$  参数  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ . (参数方程不唯一)

设在  $x$  轴上方直线  $l$  上任意一点  $E$  的极坐标为  $(\rho, \theta)$ , 连接  $ED$ .

在  $\triangle BED$  中,  $DB=4$ , 由正弦定理, 得  $\frac{DB}{\sin \angle BED} = \frac{ED}{\sin \angle EBD}$ , 即  $\frac{4}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{\rho}{\sin(180^\circ - 60^\circ)}$ ,

所以  $\rho = \frac{4 \sin 60^\circ}{\sin(60^\circ - \theta)}$ ,

所以  $\rho \sin(60^\circ - \theta) = 2\sqrt{3}$ .

经验证, 在  $x$  轴上及  $x$  轴下方直线  $l$  上的点也满足上式,

所以直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \sin(60^\circ - \theta) = 2\sqrt{3}$ . ..... 5 分

(2) 设直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数).

联立直线  $l$  的参数方程和曲线  $C$  的普通方程, 得  $t^2 - 2t - 56 = 0$ .

设  $BM, BN$  对应的参数为  $t_1, t_2$ , 则  $\frac{t_1 + t_2}{2} = 1$ ,

所以  $BQ=1$ .

在  $\triangle DBQ$  中,  $S_{\triangle DBQ} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot BQ \cdot \sin \angle DBQ = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \sin 120^\circ = \sqrt{3}$ . ..... 10 分

23. 解: (1) 因为  $f(x)$  是偶函数, 所以只需针对  $x \geq 0$  时  $f(x)$  的情况展开讨论.

当  $x \in [0, 1)$  时,  $f(x) = 1 - x^2 - 2(3 - x^2) = x^2 - 5$ , 此时不等式化为  $x^2 - 5 > -4$ , 得  $x^2 > 1$ , 舍去;



当  $x \in [1, \sqrt{3})$  时,  $f(x) = x^2 - 1 - 2(3 - x^2) = 3x^2 - 7$ , 此时不等式化为  $3x^2 - 7 > -4$ , 得  $x^2 > 1$ ,

所以  $x \in (1, \sqrt{3})$ ;

当  $x \in [\sqrt{3}, +\infty)$  时,  $f(x) = x^2 - 1 - 2(x^2 - 3) = -x^2 + 5$ , 此时不等式化为  $-x^2 + 5 > -4$ , 得  $x^2 < 9$ ,

所以  $x \in [\sqrt{3}, 3)$ .

综上所述, 所求不等式的解集为  $(1, 3) \cup (-3, -1)$ . ..... 5 分

(2) 由 (1) 可知, 当  $x \in [0, 1)$  时,  $f(x)$  的值域为  $[-5, -4)$ ;

当  $x \in [1, \sqrt{3})$ ,  $f(x)$  的值域为  $[-4, 2)$ ;

当  $x \in [\sqrt{3}, +\infty)$ ,  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, 2]$ .

因此, 当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, 2]$ ,

所以  $f(x)$  的最大值为 2, 则  $a + b = 2$ ,

所以  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) (a + b) = \frac{1}{2} \left( \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} + a^2 + b^2 \right) \geq \frac{1}{2} (2\sqrt{a^2 b^2} + a^2 + b^2) = \frac{1}{2} (a + b)^2$ ,

即  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{1}{2} (a + b)^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$  ①, 当且仅当  $a = b = 1$  时等号成立.

因为  $2 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , 所以  $ab \leq 1$ ,

所以  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2ab \geq 2$ ,

即  $a^2 + b^2 \geq 2$  ②, 当且仅当  $a = b = 1$  时等号成立.

由 ① + ②, 得  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + a^2 + b^2 \geq 4$ , 当且仅当  $a = b = 1$  时等号成立,

所以  $Z$  的最小值为 4. .... 10 分