

成都石室中学高 2024 届高三适应性考试(一)

理科数学

(全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟)

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在本试卷和答题卡相应位置上.
- 作答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案.答案不能答在试卷上.
- 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答.答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先画掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.
- 考生必须保证答题卡的整洁.考试结束后,将试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题列出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

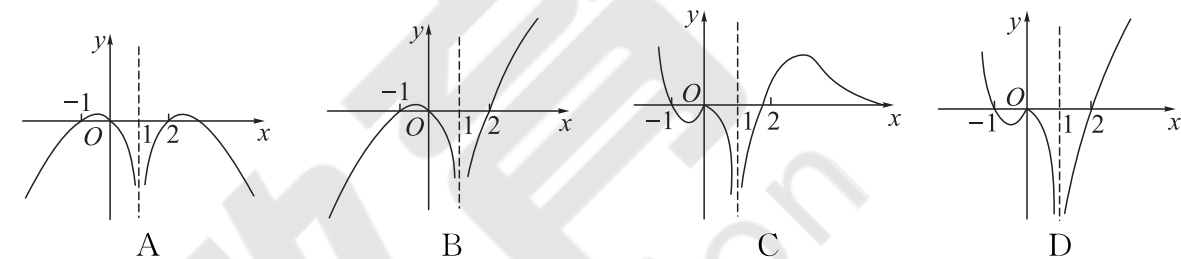
- 已知集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | ax + 2 = 0\}$,若 $B \subseteq A$,则实数 a 的所有可能取值的集合为
A. $\{-2\}$ B. $\{2\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$
- 复数 $z = \frac{-2+ai}{1-i}$ 在复平面上对应的点位于虚轴上,则实数 a 的值为
A. 1 B. 2 C. -1 D. -2
- 已知 a, b 为实数,则使得“ $a > b > 0$ ”成立的一个必要不充分条件为
A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\ln(a+1) > \ln(b+1)$
C. $a^3 > b^3 > 0$ D. $\sqrt{a-1} > \sqrt{b-1}$
- 《周易》历来被人们视作儒家群经之首,它表现了古代中华民族对万事万物深刻而又朴素的认识,是中华人文文化的基础,它反映出中国古代的二进制计数的思想方法,我们用近代术语解释为:把阳爻“—”当作数字“1”,把阴爻“--”当作数字“0”,则八卦所代表的数表示如下:

卦名	符号	表示的二进制数	表示的十进制数
坤	☷	000	0
艮	☶	001	1
坎	☵	010	2
巽	☴	011	3

依次类推,则六十四卦中的“屯”卦,符号为“☳”,其表示的十进制数是

- A. 33 B. 34 C. 35 D. 36

5. 函数 $f(x) = (x+1)\ln|x-1|$ 的大致图象是



6. 在区间 $[-2, 4]$ 上随机地取一个数 x ,使 $2x \leq \sin x$ 恒成立的概率是

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

7. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ,过抛物线上一点 P 作其准线的垂线,设垂足为 Q ,若 $\angle PQF = 30^\circ$,则 $|PQ| =$

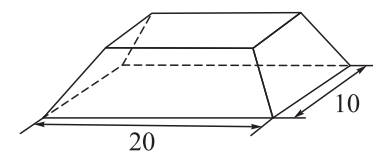
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\sqrt{3}$

8. 变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 2, \\ 2x+y \leq 4, \\ 4x-y \geq -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = |x| + |y-3|$ 的取值范围是

- A. $[\frac{3}{2}, 9]$ B. $[\frac{1}{2}, 5]$ C. $[\frac{1}{2}, 2]$ D. $[1, 6]$

9. 我们把所有顶点都在两个平行平面内的多面体叫做拟柱体,在这两个平行平面内的面叫做拟柱体的底面,其余各面叫做拟柱体的侧面,两底面之间的垂直距离叫做拟柱体的高,过高的中点且平行于底面的平面截拟柱体所得的截面称为中截面.已知拟柱体的体积公式为 $V = \frac{1}{6}h(S+4S_0+S')$,其中 S, S' 分别是上、下底面的面积, S_0 是中截面的面积, h 为拟柱体的高.

一堆形为拟柱体的建筑材料,其两底面是矩形且对应边平行(如图),下底面长 20 米、宽 10 米,堆高 1 米,上底面的长、宽比下底面的长、宽各少 2 米.现在要彻底运走这堆建筑材料,若用最大装载量为 5 吨的卡车装运,则至少需要运(注:1 立方米该建筑材料约重 1.5 吨)



- A. 51 车 B. 52 车 C. 54 车 D. 56 车

10. 设锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $c = 2, B = 2C$,则 $a + b$ 的取值范围为

- A. $(2, 10)$ B. $(2+2\sqrt{2}, 10)$ C. $(2+2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{3})$ D. $(4+2\sqrt{3}, 10)$

11. 已知菱形 $ABCD$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, 现将菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起, 当 $AC = 3\sqrt{3}$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{9}{2}$, 则此时三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为

- A. 28π B. 7π C. $\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$ D. 40π

12. 在同一平面直角坐标系中, M, N 分别是函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ 和函数 $g(x) = axe^x - \ln(ax)$ 图象上的动点, 对任意 $a > 0$, $|MN|$ 的最小值为

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{2} + 1$

第 II 卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在 $(2x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中, 常数项为 ▲.

14. 若函数 $f(x) = a\sin x + \cos x$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称, 则 $a =$ ▲.

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为左支上一点, $\angle PF_1F_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心为 I , 直线 PI 与 x 轴交于点 Q , 若双曲线的离心率为 $\frac{5}{4}$, 则 $\frac{|PI|}{|IQ|} =$ ▲.

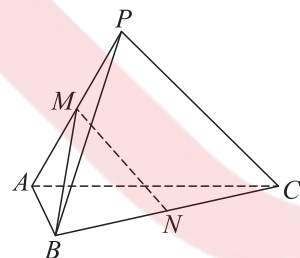
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\ln a_{n+1} = a_n + 1$, 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值, 若 $\ln a_4 = (1 + a_2)x_0$, 则 $a_1 + a_2 =$ ▲.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = BC = 4$, $AC = PB = 5$, $AB = 3$, 异面直线 PA 与 BC 所成角为 60° , 点 M, N 分别是线段 PA, BC 的中点.

- (1) 求线段 PC 的长度;
(2) 求直线 PC 与平面 BMN 所成角的余弦值.



18. (本小题满分 12 分) 《中华人民共和国未成年人保护法》保护未成年人身心健康, 保障未成年人合法权益. 我校拟选拔一名学生作为领队, 带领我校志愿队上街宣传未成年人保护法. 现已从全校选拔出甲、乙两人进行比赛, 比赛规则是: 准备了 5 个问题让选手回答, 选手若答对问题, 则自己得 1 分, 该选手继续作答; 若答错问题, 则对方得 1 分, 换另外选手作答. 比赛结束

时分数多的一方获胜, 甲、乙能确定胜负时比赛就结束, 或 5 个问题回答完比赛也结束. 已知甲、乙答对每个问题的概率都是 $\frac{1}{2}$. 竞赛前抽签, 甲获得第一个问题的答题权.

- (1) 求甲同学连续回答了三次问题且获胜的概率;
(2) 已知 5 个问题回答完后乙获胜, 设在前三个问题中乙回答问题的个数为 X , 求 X 的分布列和期望.

19. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 1$, 当 $n \geq 3$ 时, $a_n = \begin{cases} a_{n-1} + a_{n-2}, & n \text{ 为奇数,} \\ 2a_{n-2} + 1, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

- (1) 求 a_4 和 a_6 , 并证明当 n 为偶数时 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;
(2) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{29}$.

20. (本小题满分 12 分) 已知抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 1)$ 的焦点为 F , 过点 $P(1, -1)$ 作抛物线 E 的两条切线, 切点分别为 M, N , $FM + FN = 5$.

- (1) 求抛物线 E 的方程;
(2) 过点 P 作两条倾斜角互补的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 交抛物线 E 于 A, B 两点, 直线 l_2 交抛物线 E 于 C, D 两点, 连接 AD, BC, AC, BD .
① 设 AC, AB, BD 的斜率分别为 k_{AC}, k_{AB}, k_{BD} , 问: $k_{AC}k_{AB} + k_{BD}k_{AB}$ 是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 说明理由;
② 设 $\angle DBC = \lambda \angle DAC$, 求 λ 的值.

21. (本小题满分 12 分) 设 $f(x) = (a^2 - 1)e^x + \sin x - 3$.

- (1) 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的零点个数;
(2) 函数 $h(x) = f(x) - \sin x - x^2 + 2ax + 2$, 若对任意 $x \geq 0$, 恒有 $h(x) > 0$, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 那么按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm x$, $D(-3, 0)$, 直线 l 过点 $B(1, 0)$, 且倾斜角为 60° . 以点 D 为极点, 以从点 D 出发与 x 轴正方向同方向的射线为极轴, 建立极坐标系, 点 $A(6, \frac{5\pi}{3})$ 在曲线 C 上.

- (1) 写出曲线 C 在第二象限的一个参数方程和直线 l 的极坐标方程;
(2) 曲线 C 与直线 l 相交于点 M, N , 线段 MN 的中点为 Q , 求 $\triangle DBQ$ 的面积.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分) 设 $f(x) = |x^2 - 1| - 2|x^2 - 3|$.

- (1) 解不等式: $f(x) > -4$;
(2) 设 $f(x)$ 的最大值为 M , 已知正数 a 和 b 满足 $a + b = M$, 令 $Z = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + a^2 + b^2$, 求 Z 的最小值.