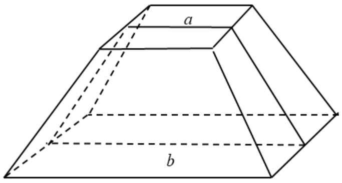
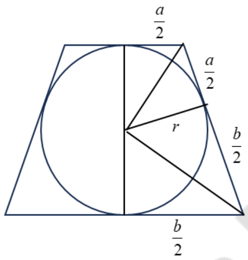
数学(文)参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	C	D	A	A	D	D	B	D	C	B

12.提示：如图，设上、下底面边长分别为a,b,内切球半径为r，过内切球球心作轴截面，利用射影定理，可得$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=r^2$，即$ab=4$，B选项满足题设.





二、填空题

13. $-\frac{1}{3}$　　14. $\frac{4}{5}$　　15. $\frac{7\sqrt{15}}{32}$　　16. $a\le 2\sqrt{2}$

16.提示：由题设知$f(x)$在定义域内单调，考虑到当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，故$f'(x)=2x-a+\frac{1}{x}\ge 0$恒成立，即$a\le(2x+\frac{1}{x})_{\min}$，有$a\le 2\sqrt{2}$.

三、解答题

17.解：(1)$\overline{x}=55\times0.01\times10+65\times0.02\times10+75\times0.03\times10+85\times0.03\times10+95\times0.01\times10=76$，（3分）

设中位数为x，因为前3组的频率之和为$0.1+0.2+0.3>0.5$，而前2组的频率之和为$0.1+0.2=0.3<0.5$，所以$70<x<80$，由$0.03\cdot(x-70)=0.5-0.3$，解得$x\approx76.67$．（6分）

（2）根据分层抽样，由频率分布直方图知成绩在$[60,70)$和$[70,80)$内的人数比例为$0.02:0.03=2:3$，所以抽取的5人中，成绩在$[60,70)$内的有$5\times\frac{2}{5}=2$人，记为A_1，A_2；

成绩在$[70,80)$内的有$5\times\frac{3}{5}=3$人，记为B_1，B_2，B_3，（8分）

从5人中任意选取2人，有A_1A_2，A_1B_1，A_1B_2，A_1B_3，A_2B_1，A_2B_2，A_2B_3，B_1B_2，B_1B_3，B_2B_3，共10种可能；其中选取的2人中恰有1人成绩在区间$[60,70)$内的有A_1B_1，A_1B_2，A_1B_3，A_2B_1，A_2B_2，A_2B_3，共6种可能；（10分）

故所求的概率为$P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$．（12分）

18.解：(1)对$2S_n=n^2+a_n+a_1-1$①，当$n\ge2$时，有$2S_{n-1}=(n-1)^2+a_{n-1}+a_1-1$②，

①-②：$2(S_n-S_{n-1})=2n-1+a_n-a_{n-1}$，即$2a_n=2n-1+a_n-a_{n-1}$，（2分）

经整理，可得$a_n-n=(-1)[a_{n-1}-(n-1)]$，（4分）

故$\{a_n-n\}$是以$a_1-1(\ne0)$为首项、-1为公比的等比数列.（5分）

(2)由(1)知$a_n-n=(-1)^{n-1}(a_1-1)$，有$a_2=3-a_1$，$a_3=a_1+2$，

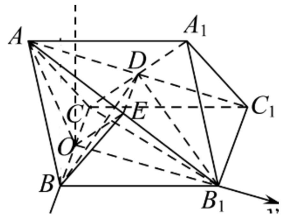
题设知$2a_2=a_1+a_3$，即$2(3-a_1)=a_1+(a_1+2)$，则$a_1=1$，故$a_n=n$．（7分）

而$b_n=\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，（9分）

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

故 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$　（12 分）

19.解:（1）取 BC 中点 O，取 AB_1 中点 E，连接 DE，BE，OE，因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 所有棱长都为 2，$\angle B_1BC=60^{\circ}$，有 $AO=B_1O=\sqrt{3}$，$AB=BB_1$，E 为 AB_1 的中点，$BCDE$ 四点共面，所以 $OE\perp AB_1$，且 $BE\perp AB_1$，BE，BE，$OE\subset$ 平面 BCD，$OE\cap BE=E$，即 $AB_1\perp$ 平面 BCD，又 $AB_1\subset$ 平面 AB_1C_1，故平面 $BCD\perp$ 平面 AB_1C_1．　（5 分）



（2）$BC\perp AO$，$BC\perp OB_1$，则 $BC\perp$ 平面 AOB_1，因为 $BC//B_1C_1$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 AOB_1，$AB_1\subset$ 平面 AOB_1，有 $B_1C_1\perp AB_1$，即 $\triangle AB_1C_1$ 为直角三角形，故 $AC_1=2DB_1=\sqrt{13}$，而 $AB_1=\sqrt{AC_1^2-B_1C_1^2}=3$，在 $\triangle AOB_1$ 中，$\cos\angle AOB_1=\frac{3+3-9}{2\times 3}=-\frac{1}{2}$．　（9 分）

则有 $V_{\text{三棱柱}}=3V_{B_1-ABC}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot BC\cdot S_{\Delta AOB_1}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．　（12 分）

20.解:（1）$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\frac{\pi}{4},\pi)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 单增区间为 $(0,\frac{\pi}{4})$，$f(x)$ 单减区间为 $(\frac{\pi}{4},\pi)$．　（4 分）

(2)i)由题设及零点存在定理可知 $x_1\in(0,\frac{\pi}{4})$，$x_2\in(\frac{\pi}{4},\pi)$，且有 $f(0)=f(\pi)<0$，且 $f(\frac{\pi}{4})>0$，

解得 $m\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}})$．　（8 分）

ii)若 $x_2\le\frac{\pi}{2}$ 时，则 $x_1+x_2<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}<\pi$；　（9 分）

若 $x_2>\frac{\pi}{2}$ 时，设 $g(x)=\frac{\sin x}{e^{\frac{\pi}{4}}}-m$，有 $g(0)=g(\pi)<0$，且 $g(\frac{\pi}{4})>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有两零点 x_1^* 和 x_2^*，其中 $x_1^*\in(0,\frac{\pi}{4})$，$x_2^*\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$，而 $g(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，且有 $x_1^*+x_2^*=\pi$．由 $\frac{\sin x}{e^{\frac{\pi}{4}}}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单增，知 $m=\frac{\sin x_1^*}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sin x_1}{e^{x_1}}>\frac{\sin x_1}{e^{\frac{\pi}{4}}}$，有 $x_1<x_1^*$；由 $\frac{\sin x}{e^{\frac{\pi}{4}}}$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 单减，知 $m=\frac{\sin x_2^*}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sin x_2}{e^{x_2}}<\frac{\sin x_2}{e^{\frac{\pi}{4}}}$，有 $x_2<x_2^*$，则 $x_1+x_2<x_1^*+x_2^*$，即 $x_1+x_2<\pi$．　（12 分）

（证明亦可利用 $f(x)>f(\pi-x),x\in(0,\frac{\pi}{4})$）

21.解: (1)由椭圆 C_1 及抛物线 C_2 的对称性，知 A 与 B、C 与 D 关于 y 轴对称，设其纵坐标分别为 y_1、y_2，联立 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 与 $y=ax^2-2$，消 x，得 $2ay^2+y+2-2a=0$ ①，

其两根即 y_1、y_2，由题设知 $\begin{cases}a>0,\\ y_1y_2=\frac{1-a}{a}<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$．　（4 分）

（2）设直线 $l:x=t(y-m)$，

若 l 表示 AC，联立 $x=t(y-m)$ 与 $y=ax^2-2$，消 x，得 $at^2y^2-(2mat^2+1)y+at^2m^2-2=0$ ②，其两根也是 y_1、y_2，故方程①与②为同解方程，有 $y_1+y_2=-\frac{1}{2a}=\frac{2mat^2+1}{at^2}$，即 $-\frac{1}{a}=4m+\frac{2}{at^2}$ ③，亦有 $y_1y_2=\frac{1-a}{a}=\frac{at^2m^2-2}{at^2}$，即 $\frac{1}{a}-1=m^2-\frac{2}{at^2}$ ④，　　（8 分）

③与④相加，可得 $m^2+4m+1=0$，有 $m_1=-2+\sqrt{3}$，$m_2=-2-\sqrt{3}$，

考虑到 M 在 C_1 内部，取 $y_M=m_1$；

若 l 表示 AD，且 N 在 C_1 外部，类上可得 $y_N=m_2$，即 $|MN|=|m_1-m_2|=2\sqrt{3}$，

故 $|MN|$ 的取值集合为 $\{2\sqrt{3}\}$.　　（12 分）

(亦可用 y_1、y_2 以点参形式直接表示直线 AC 与 AD，可得到 $y_M-y_N=2\sqrt{(y_1+2)(y_2+2)}$)

22. 解：(1) 由 $\rho=\cos\theta+\sin\theta$ 得 $\rho^2=\rho\cos\theta+\rho\sin\theta$，即 $x^2+y^2=x+y$，整理可得 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，而 $0\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$，图形分析可知 $y\ge0$，

故 C 在直角坐标系下的普通方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}(y\ge0)$.　　（4 分）

(2) 将 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=\frac{1}{2}+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，消去 x,y，整理得 $t^2+\cos\alpha\cdot t-\frac{1}{4}=0$，

$\Delta=\cos^2\alpha+1>0$，考虑到 $y\ge0$，由图形可知 $0\le\alpha<\alpha_0$，α_0 为锐角且满足 $\tan\alpha_0=\frac{1}{2}$，由韦达定理及题设可知 $t_K{}^2=|t_A|\cdot|t_B|=|t_At_B|=\frac{1}{4}$，考虑点 K 在线段 AB 上，$t_K=-\frac{1}{2}$，则点 K 的坐标为 $(1+t_K\cos\alpha,\frac{1}{2}+t_K\sin\alpha)$，　　（8 分）

故 K 轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}\cos\alpha,\\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$0\le\alpha<\alpha_0$），其中锐角 α_0 满足 $\tan\alpha_0=\frac{1}{2}$.

（10 分）

23.解：（1）由均值不等式可知 $a+b+c=a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\ge4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}}$，即 $abc^2\ge4\sqrt[4]{\frac{abc^2}{4}}$，整理得 $abc^2\ge4$，故 abc^2 的最小值为 4，取最值条件为 $a=b=\frac{c}{2}=1$.　　（4 分）

(2) 由（1）知即证 $4abc+(a+b)c^2\ge4^2$，由 $a+b+c=abc^2$ 可得 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=c$，即有 $4abc+(a+b)c^2=(4ab+ac+bc)c=(4ab+ac+bc)(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc})$，由柯西不等式可知 $(4ab+ac+bc)(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc})\ge(\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}+\sqrt{ac\cdot\frac{1}{ac}}+\sqrt{bc\cdot\frac{1}{bc}})^2=(2+1+1)^2=4^2$，取等条件为 $\frac{4ab}{\frac{1}{ab}}=\frac{ac}{\frac{1}{ac}}=\frac{bc}{\frac{1}{bc}}$，即 $a=b=\frac{c}{2}=1$. 故 $4abc+(a+b)c^2\ge4^2$.　　（10 分）