成都市第七中学 2024 届高三考前热身考试

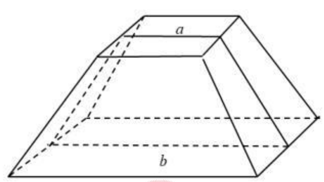
数学(理)参考答案

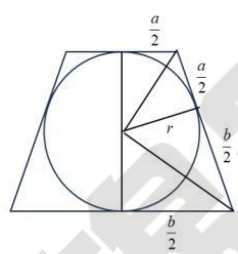
一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	A	D	D	D	B	D	C	B	B	B

5. 提示：曲线 $y=3^{2x}$ 关于 $x=a$ 的对称曲线为 $y=3^{2(2a-x)}$，即 $y=3^{4a-2x}$，与 $y=3^{1-2x}$ 对比系数 可知 $4a=1$，故 $a=\frac{1}{4}$.

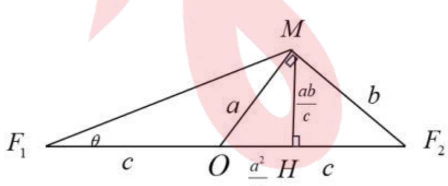
10.提示: 如图,设上、下底面边长分别为 a,b ,内切球半径为 r ,过内切球球心作轴截面,利 用射影定理，可得 $\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=r^2$,即 $ab=4$,B 选项满足题设.





11. 提示：对于 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增,可得 $\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$,即 $\omega\le\frac{12}{7}$,有 $0<\omega\frac{\pi}{6}+\varphi<\frac{2\pi}{7}+\pi<\frac{3\pi}{2}$，结合单调性，可知 $0<\omega\frac{\pi}{6}+\varphi<\frac{\pi}{2}$，仅需限定 $\omega\frac{3\pi}{4}+\varphi\le\frac{\pi}{2}$，又 考虑 $\varphi>0$，则有 $0<\omega<\frac{2}{3}$，故满足 “必要条件 “；但当 $\frac{\pi}{2}\le\varphi<\pi$ 时，对于 $0<\omega<\frac{2}{3}$， $\omega\frac{3\pi}{4}+\varphi\le\frac{\pi}{2}$ 无法成立,故不满足"充分条件".

12. 提示: 如图,设 $\triangle MF_1F_2$ 的最小角为 θ ,利用特征 $\mathrm{Rt}\triangle MOF_2$ 可知 $OH=\frac{a^2}{c}$,$MH=\frac{ab}{c}$,其中 H 为垂足,则有 $\tan\theta=\frac{\frac{ab}{c}}{c+\frac{a^2}{c}}=\frac{ab}{2a^2+b^2}\le\frac{ab}{2\sqrt{2}ab}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,取等条件为 $2a^2=b^2$,故 $e=\sqrt{3}$



二、填空题

13. $\frac{4}{5}$ 14. -80 15. $\frac{7\sqrt{15}}{32}$ 16. $-2<t<-\frac{5}{4}-\ln 2$

16.提示: 设相异三点到 M 的距离为 d ,可知函数 $f(x)=(x-3)^2+(\ln x-t)^2-d^2$ 至少有 3 个 零点, $f'(x)=2\frac{(x-3)x+\ln x-t}{x}$,令 $g(x)=(x-3)x+\ln x-t$, $g'(x)=2x-3+\frac{1}{x}$, $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right),(1,+\infty)$ 符号正负正， $g(x)$ 对应增减增，为满足题设， $g(x)$ 符号必须负正负正，即 $g\left(\frac{1}{2}\right)g(1)<0$,此时 $-2<t<-\frac{5}{4}-\ln 2$,这样才有 $f(x)$ 减增减增,其图象为 W 型, $f(x)$ 有 3 或 4 个零点.

三、解答题

17. 解: (1) 对 $2S_n=n^2+a_n+a_1-1$ ①,当 $n\geq 2$ 时,有 $2S_{n-1}=(n-1)^2+a_{n-1}+a_1-1$ ②,

①-②: $2(S_n-S_{n-1})=2n-1+a_n-a_{n-1}$,即 $2a_n=2n-1+a_n-a_{n-1}$,（2 分）

经整理,可得 $a_n-n=(-1)[a_{n-1}-(n-1)]$, (4 分)

故 $\{a_n-n\}$ 是以 $a_1-1(\neq 0)$ 为首项、 -1 为公比的等比数列.（5 分）

(2)由(1)知 $a_n-n=(-1)^{n-1}(a_1-1)$,有 $a_2=3-a_1, a_3=a_1+2$,

题设知 $2a_2=a_1+a_3$,即 $2(3-a_1)=a_1+(a_1+2)$,则 $a_1=1$,故 $a_n=n$ (7 分)

而 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,（9 分）

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

故 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$ （12 分）

18. 解：(1) 记甲、乙、丙三人选择“共享单车”出行分别为事件 A,B,C ，记三人中恰有两人 选择“共享单车”出行为事件 D ,

则 $P(D)=P\left(AB\bar{C}\right)+P\left(A\bar{B}C\right)+P\left(\bar{A}BC\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$.

又 $P(CD)=P\left(\bar{A}BC\right)+P\left(A\bar{B}C\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$,（3 分）

所以 $P(C\mid D)=\frac{P(CD)}{P(D)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{11}{24}}=\frac{9}{11}$,

即若有两人选择“共享单车”出行，丙选择“共享单车”的概率为$\frac{9}{11}$（5 分）

（2）由题意可知,X 的所有可能取值为 0,1,2,3 ,

则 $P(X=0)=P(\overline{ABC})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$,

$P(X=1)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,

$$P(X=2)=P(D)=\frac{11}{24},$$

$P(X=3)=P(ABC)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, (9 分)

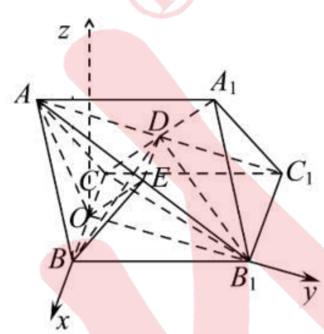
所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

故 $E(X)=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{24}+3\times\frac{1}{4}=\frac{23}{12}$,

即 X 的数学期望为$\frac{23}{12}$.（12 分）

19. 解：(1) 取 BC 中点 O ,取 AB_1 中点 E ,连接 DE,BE ,



OE ,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 所有棱长都为 2,$\angle B_1BC=60^\circ$, 有 $AO=B_1O=\sqrt{3}$,$AB=BB_1$,E 为 AB_1 的中点,$BCDE$ 四点 共面,所以 $OE\perp AB_1$,且 $BE\perp AB_1$,BE,BE,$OE\subset$ 平面 BCD,$OE\cap BE=E$,即 $AB_1\perp$ 平面 BCD ,又 $AB_1\subset$ 平面 AB_1C_1 ,故平面 $BCD\perp$ 平面 AB_1C_1 （5 分）

（2）因为 $BC//B_1C_1$,所以 $B_1C_1\perp$ 平面 AOB_1,$AB_1\subset$ 平面 AOB_1 ,所以 $B_1C_1\perp AB_1$, 所以 $\triangle AB_1C_1$ 为直角三角形,所以 $AC_1=2DB_1=\sqrt{13}$,所以

$AB_1=\sqrt{AC_1^2-B_1C_1^2}=3$,在 $\triangle AOB_1$ 中, $\cos\angle AOB_1=\frac{3+3-9}{2\times3}=-\frac{1}{2}$.（6 分）

以 O 为原点，作 $Oz\perp$ 平面 BCC_1B_1，以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{Oz}$ 方向为 x,y,z 轴正方向，建立空 间直角坐标系，如图所示，则 $C(-1,0,0)$， $B_1(0,\sqrt{3},0)$，
$C_1(-2,\sqrt{3},0)$，$A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，由 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$,所以 $A_1\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{CA_1}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right),\overrightarrow{CB_1}=(1,\sqrt{3},0)$,

设平面 A_1CB_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB_1}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CA_1}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$,

令 $z=1$,解得 $\vec{n}=(3,-\sqrt{3},1)$,所以平面 C_1CB_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$（10 分）

记二面角 $A_1-CB_1-C_1$ 的大小为 θ,且 θ 为锐角,

则 $\cos\theta=|\cos\vec{m},\vec{n}|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$,

即二面角 $A_1-CB_1-C_1$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$（12 分）

20. 解：(1)由椭圆 C_1 及抛物线 C_2 的对称性，知 A 与 B、C 与 D 关于 y 轴对称，设其纵坐标分 别为 y_1、y_2,联立 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 与 $y=ax^2-2$,消 x,得 $2ay^2+y+2-2a=0$ ①,

其两根即 y_1、y_2,由题设知 $\begin{cases}a>0,\\ y_1y_2=\frac{1-a}{a}<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.（4 分）

(2) 设直线 $l: x=t(y-m)$,

若 l 表示 AC,联立 $x=t(y-m)$ 与 $y=ax^2-2$,消 x,得 $at^2y^2-(2mat^2+1)y+at^2m^2-2=0$ (2) 其两根也是 y_1、y_2,故方程①与②为同解方程,有 $y_1+y_2=-\frac{1}{2a}=\frac{2mat^2+1}{at^2}$,即

$-\frac{1}{a}=4m+\frac{2}{at^2}$ ③,亦有 $y_1y_2=\frac{1-a}{a}=\frac{at^2m^2-2}{at^2}$,即 $\frac{1}{a}-1=m^2-\frac{2}{at^2}$ ④, (8 分)

③与④相加，可得 $m^2+4m+1=0$，有 $m_1=-2+\sqrt{3},m_2=-2-\sqrt{3}$

考虑到 M 在 C_1 内部,取 $y_M=m_1$;

若 l 表示 AD,且 N 在 C_1 外部,类上可得 $y_N=m_2$,即 $|MN|=|m_1-m_2|=2\sqrt{3}$,

故 $|MN|$ 的取值集合为 $\{2\sqrt{3}\}$.（12 分）

(亦可用 y_1、y_2 以点参形式直接表示直线 AC 与 AD,可得到 $y_M-y_N=2\sqrt{(y_1+2)(y_2+2)}$

21. 解: (1) $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x}{2(e^x-1)^2\cos^2\frac{x}{2}}(e^x-e^{-x}-2\sin x)$

令 $g(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$,有 $g'(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$,

而当 $x\in(0,\pi)$, $g'(x)>2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2\cdot1=0$,则 $g(x)$ 单增,有 $g(x)>g(0)=0$

即 $f'(x)>0$ ，则 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内单调递增. (4 分)

(2) i) 由 $e^{x_1}\sin x_2=e^{x_2}\sin x_1$,可令得 $\frac{\sin x_1}{e^{x_1}}=\frac{\sin x_2}{e^{x_2}}=m$,设 $h_1(x)=\frac{\sin x}{e^x}-m$, $h_1'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$ 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $h_1'(x)>0$, $h_1(x)$ 单增; 当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 时, $h_1'(x)<0$, $h_1(x)$ 单减. 由题设知 $h_1(0)=h_1(\pi)<0$,且 $h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$,则有 $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $x_2\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$, $m\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$.

若 $x_2\le\frac{\pi}{2}$ 时,则 $x_1+x_2<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}<\pi$;（6 分）

若 $x_2>\frac{\pi}{2}$ 时,设 $h_2(x)=\frac{\sin x}{e^{\frac{\pi}{4}}}-m$,易知其在 $(0,\pi)$ 内有两零点 x_1^* 和 x_2^* ,其中 $x_1^*\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $x_2^*\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,而 $h_2(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称,且有 $x_1^*+x_2^*=\pi$. 由 $\frac{\sin x}{e^{\frac{\pi}{4}}}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单增,知 $m=\frac{\sin x_1^*}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sin x_1}{e^{x_1}}>\frac{\sin x_1}{e^{\frac{\pi}{4}}}$,有 $x_1<x_1^*$; 由 $\frac{\sin x}{e^{\frac{\pi}{4}}}$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单减,知 $m=\frac{\sin x_2^*}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sin x_2}{e^{x_2}}<\frac{\sin x_2}{e^{\frac{\pi}{4}}}$, 有 $x_2<x_2^*$,则 $x_1+x_2<x_1^*+x_2^*$,即 $x_1+x_2<\pi$. (8 分)

(证明亦可利用 $f(x)>f(\pi-x), x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$)

ii) 由 $e^{x_1}\sin x_2=e^{x_2}\sin x_1$,得 $\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1-x_2}{2}\right)=e^{x_2-x_1}\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1-x_2}{2}\right)$,利用正弦和 差角公式,经过化切后得 $\tan\frac{x_1+x_2}{2}-\tan\frac{x_1-x_2}{2}=e^{x_2-x_1}\left(\tan\frac{x_1+x_2}{2}+\tan\frac{x_1-x_2}{2}\right)$,

再整理可得 $\tan\frac{x_2+x_1}{2}=\tan\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\frac{e^{x_2-x_1}+1}{e^{x_2-x_1}-1}$，（10 分）

由题设知 $0<x_2-x_1<\frac{\pi}{2}$,利用（1）结论有 $\tan\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\frac{e^{x_2-x_1}+1}{e^{x_2-x_1}-1}<\tan\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}$,

则 $\tan\frac{x_2+x_1}{2}<\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}<\frac{4.9+1}{4.8-1}<\sqrt{3}$,由 i) 知 $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$,即 $\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{3}$,

综上, $x_1+x_2<\frac{2\pi}{3}$. （12 分）

22. 解： (1) 由 $\rho=\cos\theta+\sin\theta$ 得 $\rho^2=\rho\cos\theta+\rho\sin\theta$,即 $x^2+y^2=x+y$,整理可得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,而 $0\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$,图形分析可知 $y\ge0$,

故 C 在直角坐标系下的普通方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(y\ge0)$. (4 分)

(2) 将 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=\frac{1}{2}+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,消去 x,y ,整理得 $t^2+\cos\alpha\cdot t-\frac{1}{4}=0$,

$\Delta=\cos^2\alpha+1>0$,考虑到 $y\geq0$,由图形可知 $0\leq\alpha<\alpha_0$, α_0 为锐角且满足 $\tan\alpha_0=\frac{1}{2}$,由韦 达定理及题设可知 ${t_K}^2=|t_A|\cdot|t_B|=|t_At_B|=\frac{1}{4}$,考虑点 K 在线段 AB 上, $t_K=-\frac{1}{2}$,则点 K 的坐 标为 $\left(1+t_K\cos\alpha,\frac{1}{2}+t_K\sin\alpha\right)$, (8 分)

故 K 轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}\cos\alpha,\\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数, $0\leq\alpha<\alpha_0$) ,其中锐角 α_0 满足 $\tan\alpha_0=\frac{1}{2}$.

（10 分）

23. 解：(1) 由均值不等式可知 $a+b+c=a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\geq4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}}$,即 $abc^2\geq4\sqrt[4]{\frac{abc^2}{4}}$,整 理得 $abc^2\geq4$,故 abc^2 的最小值为 4,取最值条件为 $a=b=\frac{c}{2}=1$. (4 分)

(2) 由 (1) 知即证 $4abc+(a+b)c^2\geq4^2$,由 $a+b+c=abc^2$ 可得 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=c$,即有 $4abc+(a+b)c^2=(4ab+ac+bc)c=(4ab+ac+bc)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)$,由柯西不等式可知

$(4ab+ac+bc)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\geq\left(\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}+\sqrt{ac\cdot\frac{1}{ac}}+\sqrt{bc\cdot\frac{1}{bc}}\right)^2=(2+1+1)^2=4^2$,取等条件为 $\frac{4ab}{\frac{1}{ab}}=\frac{ac}{\frac{1}{bc}}=\frac{bc}{\frac{1}{bc}}$,即 $a=b=\frac{c}{2}=1$. 故 $4abc+(a+b)c^2\geq4^2$.

（10 分）