

5. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $a > b + 1$ ”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 已知单位向量 a, b 满足 $a \cdot b = 0$, 则 $\cos \langle a+b, 2a+4b \rangle =$

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

7. 若 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{6}$, 且 $\tan \alpha = 2 \tan \beta$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

8. 下列不等式成立的是

A. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$

B. $\log_2 5 < \log_4 12$

C. $\log_7 3 > \frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $(\sqrt{2})^{3.9} > 3.9$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$, 则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 4π

B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 对称

C. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，所得图象的解析式为 $y = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{8}\right)$

D. $f\left(\frac{4\pi}{5}\right) > f\left(\frac{7\pi}{10}\right)$

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(3x+1)$ 为偶函数, $f(x+2)-2$ 为奇函数, 且 $f(1)=0$, 则

A. $f(x)$ 为周期函数

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称

C. $f(-3), f(-2), f(-1)$ 成等差数列

D. $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(9) = 16$

11. 已知各项都是正数的数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$, 则下列结论中正确的是

A. $\{a_n\}$ 是单调递增数列

B. $S_n + S_{n+2} < 2S_{n+1}$

C. $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} > \frac{S_{n+1}-2}{2}$

D. $\frac{S_n-2}{3S_n-2} \leq \frac{1}{4} \ln n$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 已知向量 $a = (4, -2)$, $b = (2, x)$. 若 $a \parallel (2a - b)$, 则 $x =$ _____.

13. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_1 = a_3 + a_4 = -10$, 则 S_n 的最小值为 _____.

14. 定义：已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x)$ 是可导函数且其导函数记为 $f''(x)$, 则曲

线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率 $K = \frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$. 据此, 曲线 $y = e^{2x}$ (其中 $x \in \mathbf{R}$)

的曲率 K 的最大值为 _____.

四、解答题：本大题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(ab - ac)\sin C = c(2b\cos A - c)\sin A$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 4, 且 $\cos B \cos C = -\frac{3}{8}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. (15分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_1 + \frac{S_2}{2} + \frac{S_3}{3} + \cdots + \frac{S_n}{n} = n^2 + 4n$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n \cdot a_{n+1} \cdot b_n = 4$, 证明: $\sum_{k=1}^n b_k < \frac{1}{5}$.

17. (15分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{e^x}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$,

(1) 当 $a < 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = 1$ 时, 过点 $(-1, m)$ 可以作 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 m 的取值范围.

18. (17分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 - a_2 = \frac{3}{32}$, $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1} + \frac{3}{8}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, 且 $n \geq 2$).

(1) 证明: 数列 $\{a_n - \frac{1}{2}\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{n \cdot a_n\}$ 的前 n 项和 H_n ;

(3) 令 $b_n = \frac{2a_n}{8a_n - 3}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $n - 1 + \frac{1}{4^n} < T_n < n$.

19. (17分)

已知函数 $f(x) = ax^2 + (1-a)x - \ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 有 2 个相异极值点, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的值;

(3) 设 m 为正整数, 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{3}{4^2})(1 + \frac{3^2}{4^3}) \cdots (1 + \frac{3^{n-1}}{4^n}) < m$, 求 m 的最小值.