

雅安市高 2022 级高三“零诊”考试 数学参考答案和评分意见

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。

1. B 2. A 3. C 4. B 5. B 6. A 7. D 8. C

二、选择题:本大题共 3 小题,每小题 6 分,共计 18 分。

9. BD 10. ACD 11. BCD

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. -1 13. -30 14. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

四、解答题:本大题共 5 小题,共 77 分。

15. (13 分)

(1) 由已知,得 $(ab - ac)c = c(2b\cos A - c)a$, 2 分

即有 $ab - ac = 2abc\cos A - ac$,

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 由于 $0 < A < \pi$, 4 分

故 $A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 由 (1) 知, $A = \frac{\pi}{3}$, $B + C = \frac{2\pi}{3}$,

则 $\cos(B + C) = -\frac{1}{2}$, 得 $\cos B \cos C - \sin B \sin C = -\frac{1}{2}$.

由已知 $\cos B \cos C = -\frac{3}{8}$, 则 $\sin B \sin C = \frac{1}{8}$ 9 分

因为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = 4$,

所以 $\frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{1}{8}$, 则 $bc = 8$ 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 13 分

16. (15 分)

(1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 5$ 2 分

当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_1 + \frac{S_2}{2} + \frac{S_3}{3} + \cdots + \frac{S_n}{n} = n^2 + 4n$, 得

$S_1 + \frac{S_2}{2} + \frac{S_3}{3} + \cdots + \frac{S_{n-1}}{n-1} = (n-1)^2 + 4(n-1)$ 4 分

两式相减, 得 $\frac{S_n}{n} = n^2 + 4n - (n-1)^2 - 4(n-1) = 2n + 3$, 5 分

所以, $S_n = 2n^2 + 3n$. 于是 $S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1)$,

所以, $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n + 1$ ($n \geq 2$). 7 分

可知 $a_1 = S_1 = 5$ 满足上式.

所以, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 4n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 8 分

(2) 由 (1) 可知 $a_n = 4n + 1$.

又由 $a_n \cdot a_{n+1} \cdot b_n = 4$, 得 $b_n = \frac{4}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{4}{(4n+1)(4n+5)}$ 9 分

$$= \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^n b_k = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) + \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right) \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5} < \frac{1}{5}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. (15分)

$$(1) \text{ 依题意, } f'(x) = \frac{a-1-ax}{e^x} = \frac{-a[x-(1-\frac{1}{a})]}{e^x}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $a < 0$ 时, $-a > 0$,

若 $x < 1 - \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1 - \frac{1}{a})$ 上单调递减; 若 $x > 1 - \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(1 - \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

故当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1 - \frac{1}{a})$; 单调递增区间为 $(1 - \frac{1}{a}, +\infty)$.

$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

注: $f(x)$ 的单调递减区间可写成 $(-\infty, 1 - \frac{1}{a}]$; 单调递增区间可写成 $[1 - \frac{1}{a}, +\infty)$

$$(2) \text{ 由 (1), 当 } a = 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{x+1}{e^x}, f'(x) = -\frac{x}{e^x}.$$

设切点 (x_0, y_0) , 则切线的斜率为 $k = -\frac{x_0}{e^{x_0}}$.

则切线的方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{e^{x_0}}(x - x_0)$, 该切线过点 $(-1, m)$,

$$\text{则 } m - y_0 = -\frac{x_0}{e^{x_0}}(-1 - x_0), \text{ 即 } m = -\frac{x_0}{e^{x_0}}(-1 - x_0) + \frac{x_0+1}{e^{x_0}} = \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{e^{x_0}}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } u(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x}, \text{ 得 } u'(x) = \frac{1 - x^2}{e^x}.$$

过点 $(-1, m)$ 可作 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 则需方程 $m = u(x)$ 有 3 个不相等实根.

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{对于函数 } u(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x},$$

当 $x < -1$ 时, $u'(x) < 0$, $u(x)$ 单调递减; $-1 < x < 1$ 时, $u'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; $x > 1$ 时, $u'(x) < 0$, $u(x)$ 单调递减.

所以当 $x = -1$ 时, $u(x)$ 取得极小值 $u(-1) = 0$; 当 $x = 1$ 时, $u(x)$ 取得极大值 $u(1) = \frac{4}{e}$.

$\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

又知当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x > -1$ 时, $u(x) > 0$, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $u(x) \rightarrow 0$.

所以, 当 $0 < m < \frac{4}{e}$ 时, 方程 $m = u(x)$ 有 3 个不相等实数根,

即当 $0 < m < \frac{4}{e}$ 时, 过点 $(-1, m)$ 可以作 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

18. (17分)

$$(1) \text{ 当 } n = 2 \text{ 时, } a_2 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{3}{8}, \text{ 又 } a_1 - a_2 = \frac{3}{32}. \text{ 解得 } a_1 = \frac{5}{8}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1} + \frac{3}{8}$, 得 $a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(a_{n-1} - \frac{1}{2}) (n \geq 2)$4分

又 $a_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

所以, $\{a_n - \frac{1}{2}\}$ 是以 $\frac{1}{8}$ 为首项, $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列.5分

(2) 由 (1) 可知, $a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \times (\frac{1}{4})^{n-1}$, 即 $a_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{4})^n + \frac{1}{2}$6分

则 $na_n = \frac{n}{2} \times (\frac{1}{4})^n + \frac{n}{2}$.

所以 $H_n = \frac{1}{2} [1 \times \frac{1}{4} + 2 \times (\frac{1}{4})^2 + \dots + n \times (\frac{1}{4})^n] + \frac{n(n+1)}{4}$7分

令 $U_n = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times (\frac{1}{4})^2 + \dots + n \times (\frac{1}{4})^n$,

则 $\frac{1}{4}U_n = 1 \times (\frac{1}{4})^2 + 2 \times (\frac{1}{4})^3 + \dots + n \times (\frac{1}{4})^{n+1}$8分

所以 $U_n - \frac{1}{4}U_n = 1 \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \dots + (\frac{1}{4})^n - n \times (\frac{1}{4})^{n+1}$
 $= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n - n \times (\frac{1}{4})^{n+1}$9分

即 $\frac{3}{4}U_n = \frac{1}{3} - \frac{3n+4}{12}(\frac{1}{4})^n$, 则 $U_n = \frac{4}{9} - \frac{3n+4}{9}(\frac{1}{4})^n$10分

所以 $H_n = \frac{2}{9} - \frac{3n+4}{18}(\frac{1}{4})^n + \frac{n(n+1)}{4}$11分

(3) 由 (2) 知, $a_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{4})^n + \frac{1}{2}$, 则 $b_n = \frac{2a_n}{8a_n-3} = \frac{(\frac{1}{4})^n + 1}{4(\frac{1}{4})^n + 1} = \frac{4^n + 1}{4^n + 4}$
 $= 1 - \frac{3}{4^n + 4}$,13分

可知 $b_n < 1$14分

故 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n < n$15分

又 $b_n = 1 - \frac{3}{4^n + 4} > 1 - \frac{3}{4^n}$.

则 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n > n - 3(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}) = n - 1 + \frac{1}{4^n}$.

综上所述, $n - 1 + \frac{1}{4^n} < T_n < n$17分

19. (17分)

(1) 由题, 得 $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + 1 - a = \frac{2ax^2 + (1-a)x - 1}{x}$1分

函数 $f(x)$ 由两个相异极值点, 需方程 $f'(x) = 0$ 即 $2ax^2 + (1-a)x - 1 = 0$ 有两个相异正数根 x_1, x_22分

令 $h(x) = 2ax^2 + (1-a)x - 1, x > 0$.

由 $\begin{cases} \Delta = (1-a)^2 + 8a > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{1-a}{2a} > 0, \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2a} > 0, \end{cases}$ 4分

解得 $a < -2\sqrt{2} - 3$ 或 $2\sqrt{2} - 3 < a < 0$.

所以 $f(x)$ 由两个相异极值点时, a 的取值范围是 $(-\infty, -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}, 0)$.

.....5 分

(2) 令 $g(x) = f(x) - 1 = ax^2 + (1-a)x - \ln x - 1 (x > 0)$,

则 $g'(x) = 2ax + 1 - a - \frac{1}{x}$, $g(1) = 0$6 分

①当 $a > 0$ 时, 知 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由于 $g'(1) = a > 0$,

$$g'\left(\frac{1}{4+a^2}\right) = \frac{2a}{4+a^2} + 1 - a - (4+a^2) \leq -\frac{5}{2} - a^2 - a = -\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} < 0,$$

故 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{4+a^2}, 1\right)$, $g'(x_0) = 0$.

当 $x > x_0$ 时, 由于 $g'(x)$ 单调递增, 则 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(1) = 0$, 所以 $x_0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f(x) < 1$, 不符题意.8 分

②当 $a = 0$ 时, $g(x) = f(x) - 1 = x - \ln x - 1 (x > 0)$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

可知 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$; $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$,

则当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得极小值, 也即为最小值, 该最小值为 $g(1) = 0$.

所以 $g(x) = f(x) - 1 \geq 0$, 即 $f(x) \geq 1$, 不等式成立.10 分

③当 $a < 0$ 时, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 故 $f(x) \geq 1$ 不恒成立, 不符题意.

综上所述, a 的值为 0.11 分

(3) 由 (2) 可知, $a = 0$ 时, 对任意 $x > 0$, $f(x) \geq 1$,

则 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立.12 分

令 $x = \frac{3^{n-1}}{4^n} + 1$, 则 $\ln\left(\frac{3^{n-1}}{4^n} + 1\right) < \frac{3^{n-1}}{4^n}$13 分

$$\text{则 } \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{4^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{3^2}{4^3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{3^{n-1}}{4^n}\right)$$

$$< \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \cdots + \frac{3^{n-1}}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{3^n}{4^n}\right)}{1 - \frac{3}{4}} = 1 - \frac{3^n}{4^n} < 1. \quad \text{.....14 分}$$

$$\text{即 } \ln\left[\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4^2}\right)\left(1 + \frac{3^2}{4^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{3^{n-1}}{4^n}\right)\right] < 1.$$

$$\text{所以 } \left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4^2}\right)\left(1 + \frac{3^2}{4^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{3^{n-1}}{4^n}\right) < e. \quad \text{.....15 分}$$

当 $n \geq 4$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4^2}\right)\left(1 + \frac{3^2}{4^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{3^{n-1}}{4^n}\right) > \left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4^2}\right)\left(1 + \frac{3^2}{4^3}\right)\left(1 + \frac{3^3}{4^4}\right) > 2,$$

.....16 分

所以对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{3^{n-1}}{4^n}\right) < m$ 成立时, 正整数 m 的最小值为 3.

.....17 分