成都七中 2024～2025 学年度(上)12月阶段性考试

数 学

注意事项:

1．答卷前，请务必将自己的姓名、考号等填写（涂）在答题卡的指定位置上.

2．回答选择题时，选出每个小题的答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；回答非选择题时，用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题卡相应位置上.

3．考试结束后，只需将答题卡交回，试卷由考生自行保管.

4．试卷满分：150 分，考试时间：120 分钟.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

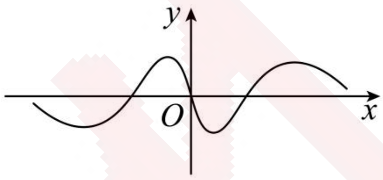
2. $\dfrac{1}{x}>1$ 是 $x<1$ 的（　　）

A.充要条件　　B.必要不充分条件　　C. 充分不必要条件　　D.既不充分也不必要条件

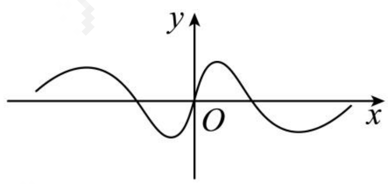
3. 已知向量 $\vec{a}=(0,4),\vec{b}=(-3,-3)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的坐标是（　　）

A. $(-2,-2)$　　B. $(0,3)$　　C. $(0,-3)$　　D. $(2,2)$

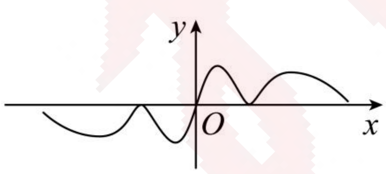
4. 函数 $f(x)=\dfrac{3x\cos x}{x^2+1}$ 的部分图象大致为（　　）



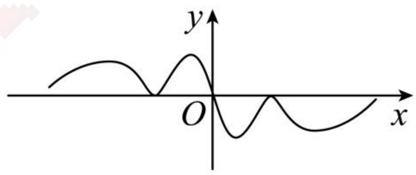
A.



B.



C.



D.

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\dfrac{S_6}{6}-\dfrac{S_3}{3}=3$，则 $a_6-a_3=$（　　）

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 18

6. 已知 $\cos(\dfrac{\pi}{4}-\theta)=3\cos(\dfrac{\pi}{4}+\theta)$, 则 $\sin 2\theta=$（　　）

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. $-\dfrac{3}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

7. 已知球O内切于圆台（即球与该圆台的上、下底面以及侧面均相切），且圆台的上、下底面半径$r_1:r_2=2:3$，则圆台的体积与球的体积之比为（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　　B. 2　　　C. $\frac{19}{12}$　　　D. $\frac{19}{6}$

8.已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$和双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有公共焦点$F_1$、$F_2$，它们在第二象限的公共点为点$P$，点$P$与右焦点$F_2$的连线交$y$轴于点$Q$，且$QF_1$平分$\angle PF_1F_2$，则双曲线$C_2$的离心率为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　　B. 2　　　C. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　　D. $\frac{5}{2}$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部份分，有选错的得 0 分．

9. 在$(2x+\frac{1}{3x})^5$的展开式中，下列说法正确的是（　　）

A. x的系数为 10　　　B. 第 4 项的二项式系数为 10

C. 没有常数项　　　D. 各项系数的和为 32

10. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$图象的任意一个对称中心到与之相邻的对称轴的距离为$\frac{\pi}{4}$，且将该图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到的图象关于$y$轴对称，则下列说法正确的是（　　）

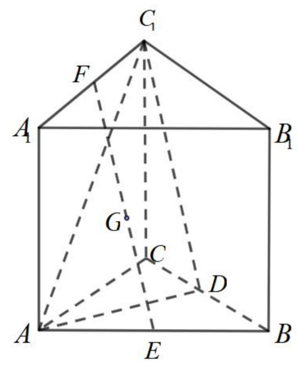
A. $\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. 直线$x=\frac{2\pi}{3}$为$f(x)$的图象的一条对称轴

C. 若$f(x)$在$(-a,a)$单调递增，则a的最大值为$\frac{\pi}{3}$

D. 对任意$k>0$，关于x的方程$f(x)=k\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$总有奇数个不同的根

11. 如图：已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1, AB=AC=AA_1=2$, 且$AB\perp AC$，D为线段BC中点，$E$、$F$分别为线段$AB$、$A_1C_1$上的动点，且满足$EF=\sqrt{6}$，点$G$为线段$EF$的中点，则下列说法正确的是（　　）



A. 若E为AB的中点，则$EF\,//$平面ADC_1

B. 若F为A_1C_1的中点，则$AG\perp$平面A_1BC

C. 点G的轨迹长度为$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

D. $|GD|$的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 函数$f(x)=x^3-12x$的极大值点为$x=$__________.

13.已知抛物线$C:y^2=4x$，过点$(4,0)$的直线与抛物线交于A，B两点，则线段AB中点M的轨迹方程为__________.

14. $x(\ln x+2)\le ax^2+\dfrac{2}{a}\ln x$ 对 $\forall x\ge e$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_________.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（13 分）在三角形 ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$.

（1）求角 C 的大小.

（2）若 $b=1$，$c=2b\cos B$，求 ΔABC 的面积.

16.（15 分）如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2,BC=2\sqrt{3}$，连接 AC，ΔDAC 沿 AC 折起到 ΔPAC 的位置，如图 2，$PB=\sqrt{10}$.

（1）求证：平面$PAC\perp$平面ABC.

（2）若点 M 是线段 PA 的中点，求 PC 与平面 MBC 所成角的正弦值.

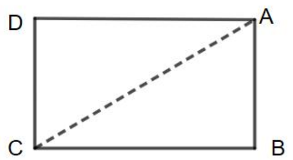


图1

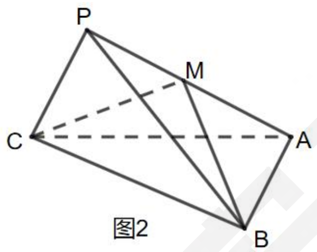


图2

17.（15 分）在今年法国巴黎奥运会网球女子单打决赛中，中国选手郑钦文夺得金牌，这也是中国选手获得的首枚奥运会网球女单金牌。网球相比于其他球类，有一套自己的计分规则，计分系统分为分、局、盘三级，一般是三盘两胜制。

1. 分——Point 代表一颗球之间的胜负，得 1 分计 15（即显示 15-0），得 2 分计 30，得 3 分计 40.

2. 局——Game 每赢 1 颗球得 1 分，先赢 4 分者胜 1 局。双方各得 3 分(即显示 40-40)时为平分（deuce），平分后一方需净胜两分为胜 1 局，此时局数加 1。每一局都是由其中一方发球，称为该方的发球局，下一局换另一方发球。

3. 盘——Set 一方先胜 6 局且至少领先对手 2 局，则胜一盘。若局分为 6-5 时，领先方需再赢一局即 7-5，才能赢得一盘。若局分为 6-6 时，需要通过 Tie-break（抢七）的方式决出胜负，胜利方会显示以 7-6 的局分赢得该盘。在“抢七”中，双方轮流发球，先得 7 分(Point）且领先对手 2 分（Point）者赢得该局即该盘。

每位球员在发球时都有两次机会，第一次发球称为一发，一发失误后进行的第二次发球称为二发（一发失误对手不得分）。在一场网球比赛中，甲乙两球员进行激烈角逐。球员甲一发成功率为 $\dfrac{2}{5}$，在一发成功的条件下一发得分率为 $\dfrac{4}{5}$，二发成功率为 $\dfrac{3}{5}$，在二发成功的条件下二发得分率为 $\dfrac{2}{3}$，一发二发相互独立.

（1）求由球员甲发球时得 1 分的概率；

（2）已知球员乙发球得 1 分的概率为 $\dfrac{2}{3}$，该场比赛进行到决胜盘的“抢七”阶段，此时比分为 6—6，下一球轮到甲发球，若球员甲希望在接下来的比赛中最多再打 4 颗球便赢得该场比赛的概率不低于 $\dfrac{23}{75}$，则他需要将自己的一发成功率提升至多少？

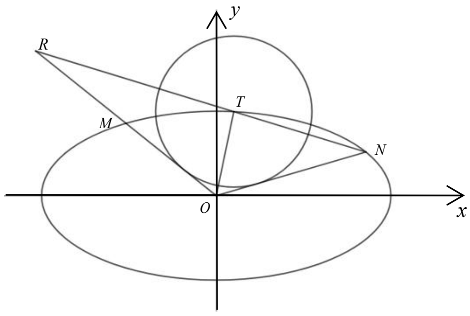
18.（17 分）已知椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，长轴长为 4，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）如图，设 T（x_0, y_0）是椭圆 C 上一动点，由原点向圆 $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{4}{5}$ 引两条切线，分别交椭圆于 M、N，若直线 OM、ON 的斜率存在，并分别记为 k_1、k_2，

（ⅰ）求证：$k_1 \cdot k_2$ 为定值；

（ⅱ）延长 NT 、OM 交于点 R，若 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$，求 $\frac{S_{\Delta ORT}}{S_{\Delta ONT}}$ 的值.



19.（17 分）已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}$

（1）判断并证明 $f(x)$ 的单调性；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 满足对 $\forall n \in N^*$，$a_{n+1}<a_n$，则称 $\{a_n\}$ 为递减数列，若满足对 $\forall n \in N^*$ $|a_{n+2}-a_{n+1}|<|a_{n+1}-a_n|$，则称 $\{a_n\}$ 为差缩数列. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $e^{a_{n+1}}=f(e^{a_n})$，且 $a_1=1$

（ⅰ）判断 $\{a_n\}$ 是否为递减数列？是否为差缩数列？并说明理由；

（ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明 $S_{2024}<3$.