成都七中 2024～2025 学年度(上)12月阶段性考试答案

一、单项选择题：

二、多项选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	C	D	B	B	B	C	D	BC	ABD	ACD

三、填空题

12. -2　　13. $y^2=2(x-4)$　　14. $a=\dfrac{2}{e^2}$ 或 $a\ge\dfrac{2}{e}$

四、解答题：

15. （1）由余弦定理 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{-\sqrt{2}ab}{2ab}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $C\in(0,\ \pi)$，（3 分）

所以 $C=\dfrac{3\pi}{4}$.（6 分）

（2）由正弦定理，$c=2b\cos B$ 即 $\sin C=2\sin B\cos B=\sin 2B$

所以 $C=2B$ 或 $C+2B=\pi$，（8 分）

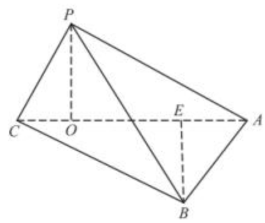
当 $C=2B$ 时，$C=\dfrac{3\pi}{4}$，$B=\dfrac{3\pi}{8}$, 此时 $B+C>\pi$，不成立，（10 分）

当 $C+2B=\pi$ 时，此时 $A=B=\dfrac{\pi}{8}$, 则 $a=b=1$,（12 分）

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.（13 分）

16. （1）过点 P、B 分别向直线 AC 作垂线，垂足分别为点 O,E.（1 分）

因为 $|AB|=2,|BC|=2\sqrt{3}$, 所以 $|AC|=4,|PO|=|BE|=\sqrt{3},|OE|=2$,（2 分）



因为 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB},\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EB}=0$

所以 $\left|\overrightarrow{PB}\right|^2=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OE}\right|^2+\left|\overrightarrow{EB}\right|^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{EB}$

$=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OE}\right|^2+\left|\overrightarrow{EB}\right|^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{EB}$（4 分）

即 $10=3+4+3+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{EB}$，

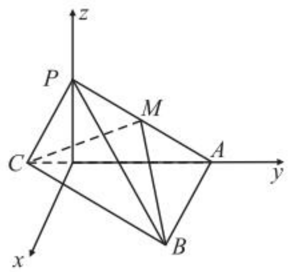
所以 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{EB}=0$，所以 $PO\perp EB$（5 分）

因为 $PO\perp AC, AC\cap BE=E$

所以 $PO\perp$ 平面 ABC，

因为 $PO\subset$ 平面 PAC

所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC（7 分）



（2）如图：以（1）中点 O 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Oxyz$

则 $C(0,-1,0),B(\sqrt{3},2,0),P(0,0,\sqrt{3}),M(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$（9 分）

所以 $\overrightarrow{MB}=(\sqrt{3},\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,1,\sqrt{3})$（11 分）

设平面 MBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ -\sqrt{3}x-3y=0\end{cases}$

取 $y=-\sqrt{3}$,则$x=3,z=5$,所以$\vec{n}=(3,-\sqrt{3},5)$　（13 分）

设直线 PC 与平面 MBC 所成角为θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{CP},\vec{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\dfrac{0-\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{37}}=\dfrac{2\sqrt{111}}{37}$　（15 分）

17. 解：（1）设“由甲发球时得 1 分”为事件 A，“甲一发成功”为事件 B_1，“甲一发得分”为事件 B_2，“甲二发成功”为事件 C_1“甲二发得分”为事件 C_2

由题意：$P(B_1B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2|B_1)=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{25}$　（2 分）

$P(\overline{B_1}C_1)=P(\overline{B_1})\cdot P(C_1|\overline{B_1})=(1-\dfrac{2}{5})\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$　（4 分）

$P(\overline{B_1}C_1C_2)=P(\overline{B_1}C_1)\cdot P(C_2|\overline{B_1}C_1)=\dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{25}$　（6 分）

则 $P(A)=P(B_1B_2)+P(\overline{B_1}C_1C_2)=\dfrac{8}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{14}{25}.$　（7 分）

（2）设甲需要将自己的一发成功率提升至 P，由甲发球得 1 分的概率为 P_0

则甲最多再打 4 个球便赢得该场比赛的概率不低于 $\dfrac{23}{75}$ 等价于

$P_0\times\dfrac{1}{3}+(1-P_0)\times\dfrac{1}{3}\times P_0\times\dfrac{1}{3}+P_0\times\dfrac{2}{3}\times P_0\times\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{23}{75},0<P_0<1$，　（9 分）

解得:$\dfrac{3}{5}\leq P_0<1$　（11 分）

所以 $P\times\dfrac{4}{5}+(1-P)\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{3}\geq\dfrac{3}{5}$　（13 分）

解得 $\dfrac{1}{2}\leq P<1$　（14 分）

答:甲需要将自己的一发成功率提升至 $\dfrac{1}{2}$　（15 分）

18.（1）. 由已知，$2a=4,\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又 $a^2=b^2+c^2$　（2 分）

解得 $a=2,b=1$，所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.　（4 分）

（2）（ⅰ）设直线 $l:y=kx$，若 l 与圆 C 相切，

则圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　（6 分）

整理得：$(x_0{}^2-\dfrac{4}{5})k^2-2x_0y_0k+y_0{}^2-\dfrac{4}{5}=0$，

由题意，k_1、k_2 为该方程两个不等实数根，

所以 $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{{y_0}^2 - \frac{4}{5}}{{x_0}^2 - \frac{4}{5}}$　（8 分）

又因为圆心 $C(x_0, y_0)$ 在椭圆 E 上，满足 ${y_0}^2 = 1 - \dfrac{{x_0}^2}{4}$　（9 分）

所以 $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{1 - \frac{{x_0}^2}{4} - \frac{4}{5}}{{x_0}^2 - \frac{4}{5}} = -\dfrac{1}{4}$　（10 分）

（ii）法一：设 M（x_1, y_1），N（x_2, y_2），T（x_0, y_0），令 $\overrightarrow{RT} = \lambda \overrightarrow{TN}$　（11 分）

则 $\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR} = \lambda(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OT})$，

整理得 $(1+\lambda)\overrightarrow{OT} = \lambda \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR}$，即 $\overrightarrow{OT} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{ON} + \dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OR}$

又因为 $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OR}$，可得 $\overrightarrow{OT} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{ON} + \dfrac{2}{1+\lambda}\overrightarrow{OM}$

即 $(x_0, y_0) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}(x_1, y_1) + \dfrac{2}{1+\lambda}(x_2, y_2)$　（13 分）

又 T（x_0, y_0）在椭圆 E 上

将 $\begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}x_1 + \dfrac{2}{1+\lambda}x_2 \\ y_0 = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}y_1 + \dfrac{2}{1+\lambda}y_2 \end{cases}$ 代入椭圆方程可得：

$\dfrac{1}{4}(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}x_1 + \dfrac{2}{1+\lambda}x_2)^2 + (\dfrac{\lambda}{1+\lambda}y_1 + \dfrac{2}{1+\lambda}y_2)^2 = 1$，整理得：

$(\dfrac{\lambda}{1+\lambda})^2(\dfrac{{x_1}^2}{4} + {y_1}^2) + (\dfrac{2}{1+\lambda})^2(\dfrac{{x_2}^2}{4} + {y_2}^2) + 2 \times \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \times \dfrac{2}{1+\lambda}(\dfrac{x_1 x_2}{4} + y_1 y_2) = 1$，（*）

（15 分）

由（i）知，$k_1 \cdot k_2 = \dfrac{y_1}{x_1} \cdot \dfrac{y_2}{x_2} = -\dfrac{1}{4}$，即 $\dfrac{x_1 x_2}{4} + y_1 y_2 = 0$（1）

同时 $\dfrac{{x_1}^2}{4} + {y_1}^2 = 1, \dfrac{{x_2}^2}{4} + {y_2}^2 = 1$，（2），将（1）（2）式代入（*）式得：

$\dfrac{\lambda^2 + 4}{(1+\lambda)^2} = 1$，解得：$\lambda = \dfrac{3}{2}$，所以 $\dfrac{S_{\Delta ORT}}{S_{\Delta ONT}} = \dfrac{|RT|}{|TN|} = \dfrac{3}{2}$.　（17 分）

法二：$\overrightarrow{OT} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$，代入坐标得 $(x_0, y_0) = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)$　（11 分）

即 $\begin{cases} x_0 = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2 \end{cases}$，代入椭圆方程：

可得：$\dfrac{1}{4}(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 + (\lambda y_1 + \mu y_2)^2 = 1$

$\lambda^2(\dfrac{{x_1}^2}{4} + {y_1}^2) + \mu^2(\dfrac{{x_2}^2}{4} + {y_2}^2) + 2\lambda\mu(\dfrac{x_1 x_2}{4} + y_1 y_2) = 1$，（*）　（13 分）

由（i）知，$k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{4}$，即 $\frac{x_1x_2}{4}+y_1y_2=0$（1）

同时 $\frac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1,\frac{{x_2}^2}{4}+{y_2}^2=1$，（2），将（1）（2）式代入（*）式得：$\lambda^2+\mu^2=1$

（15 分）

令 $\overrightarrow{RT}=t\overrightarrow{TN}$，即：$\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OR}=t(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OT})$，又因为 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$

所以 $\overrightarrow{OT}=\frac{t}{1+t}\overrightarrow{ON}+\frac{2}{1+t}\overrightarrow{OM}$，由 $\lambda^2+\mu^2=1$ 可得：

$(\frac{t}{1+t})^2+(\frac{2}{1+t})^2=1$，解得 $t=\frac{3}{2}$ 所以 $\frac{S_{\Delta ORT}}{S_{\Delta ONT}}=\frac{|RT|}{|TN|}=\frac{3}{2}$　　（17 分）

19. 解：（1）由已知定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1+\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$（1 分）

令 $h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，（3 分）

所以 $h(x)>h(1)=0$，即 $f'(x)>0$ 恒成立（5 分）

所以 $f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 和 $x\in(1,+\infty)$ 上分别单调递增

（注：如果学生答在 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上单调递增亦可得分）

（2）（i）由已知 $e^{a_{n+1}}=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$，（6 分）

设 $h(x)=e^x-x-1$，$h'(x)=e^x-1$，$x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，$x\in(0,,+\infty)$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)\ge h(0)=0$

故当 $x>0$ 时，$\frac{e^x-1}{x}>1$，

又因为 $a_1=1$，所以 $e^{a_2}=\frac{e^{a_1}-1}{a_1}=\frac{e-1}{1}>1$，则 $a_2>0$，同理 $a_3>0,\ldots a_n>0$

（7 分）

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$，则 $g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)>0,g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,,+\infty)$ 时，$g'(x)<0,g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)<g(0)=0$，所以 $xe^x>e^x-1$，所以 $a_ne^{a_n}>e^{a_n}-1$

因为 $a_n>0$，所以 $e^{a_n}>\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=e^{a_{n+1}}$，所以 $a_n>a_{n+1}$，故 $\{a_n\}$ 为递减数列（8 分）

又 $a_{n+1}-a_n=\ln(e^{a_n}-1)-\ln a_n-a_n$，设 $a_n=x,x\in(0,1]$，

设 $F(x)=\ln(e^x-1)-\ln x-x,x\in(0,1]$

则 $F'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}-1=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}<0$，所以函数 $F(x)$ 单调递减，

随着 a_n 减小，从而 $a_{n+1}-a_n$ 增大，又因为 $a_{n+1}-a_n<0$ ，所以 $|a_{n+1}-a_n|$ 减小

即 $|a_{n+2}-a_{n+1}|<|a_{n+1}-a_n|$ 成立，从而 $\{a_n\}$ 是差缩数列　（11 分）

（ii）由（i）得 $0<a_{n+1}<a_n\le 1$. 下证 $a_{n+1}\le\frac{2}{3}a_n$

即证 $\ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\le\frac{2}{3}a_n$，即证 $\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\le e^{\frac{2}{3}a_n}$，令 $x=e^{a_n}$，$x\in(1,e]$

即证 $\frac{x-1}{\ln x}\le x^{\frac{2}{3}}$，亦即证 $x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}-\ln x\le 0$,　（13 分）

令 $H(x)=x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}-\ln x\le 0,1<x\le e$

则 $H'(x)=\frac{1}{3x}(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-2)$,

因为 $1<x\le e$ ，所以 $1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}>0,\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-2<\sqrt[3]{x}-2<0$

即 $H'(x)=\frac{1}{3x}(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-2)<0$,

所以 $H(x)$在$x\in(1,e]$单调递减，

所以 $H(x)\le H(1)=0$ 成立，所以 $a_{n+1}\le\frac{2}{3}a_n$，$n\in N^*$　（15 分）

$S_{2024}<a_1+\frac{2}{3}a_1+\ldots+(\frac{2}{3})^{2023}a_1=\frac{1-(\frac{2}{3})^{2024}}{1-\frac{2}{3}}=3[1-(\frac{2}{3})^{2024}]<3$，证毕.　（17 分）