

机密★启封并使用完毕前

湖南名校教育联盟·2025 届高三 12 月大联考

数学试卷

(满分:150 分 时量:120 分钟 命题学校:桃源县第一中学 审题学校:湘潭县第一中学)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 2^x \leq 3\}$, $B = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{1\}$ D. $\emptyset$

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 + a_4 = 3$, $a_2 + a_5 = 6$, 则 $S_6 =$ ()

A. 27 B. 24 C. 21 D. 18

3. 已知复数 z_1 在复平面内所对应的点位于第一象限, 且 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{(1+i)^2}$, 则复数 z_2 在复平面内所对应的点位于 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 已知向量 $\mathbf{a} = (\cos \theta, 1)$, $\mathbf{b} = (1, \sin \theta)$, 若 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $\frac{3 - \cos 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ 的值为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 已知 $f(x) = \frac{2^x \cdot \sin x}{2^{ax} - 1}$ 是偶函数, 则 $a =$ ()

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

6. 将函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 则 ω 的最大值为 ()

A. 6 B. 5 C. 3 D. 2

7. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, A 是椭圆 C 的左顶点, 过点

A 的直线 l 与椭圆 C 相交于另一点 P , 且 $|F_1 F_2| = |P F_2|$, 椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则直线 l 的斜率为 ()

A. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\pm \frac{1}{2}$ C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\pm \frac{1}{3}$

8. 定义 $f(x)=f'(x)$ 的实数根 x 为 $f(x)$ 的“坚定点”, 已知 $a>0$, 且 $a \neq 1$, 则下列函数中, 不存在“坚定点”的是 ()

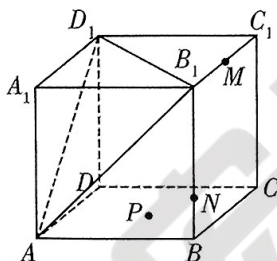
- A. $f(x)=a \sin x$ B. $f(x)=\ln ax$
C. $f(x)=x^3+2x^2+ax+a$ D. $f(x)=e^{ax}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 部分选对得部分分, 有选错得 0 分.

9. 已知 $x>y>0$, 则下列结论一定正确的是 ()

- A. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ B. $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} > 2$
C. $0.2^x > 0.2^y$ D. $\frac{1}{\ln x} < \frac{1}{\ln y}$

10. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为线段 B_1C_1, BB_1 上的动点 (包括端点), 点 P 在底面 $ABCD$ 内运动 (包括边界), 则下列说法正确的有 ()



- A. 存在唯一的 M, P , 使得 $MP \perp AC_1$
B. 存在唯一的 M, P , 使得 $MP \parallel AC_1$

- C. 若 M 为线段 B_1C_1 的中点, 且 $MP \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 则动点 P 的轨迹的长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- D. 若 M 为线段 B_1C_1 的中点, 则 $MP+PA_1$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{21}}{2}$

11. 在平面直角坐标系中, 已知 $F_1(-3,0), F_2(3,0), O$ 为原点, P 为平面内的动点, 且 PH 垂直于 y 轴, 垂足为 H , 则满足下列条件的动点 P 的轨迹为椭圆的是 ()

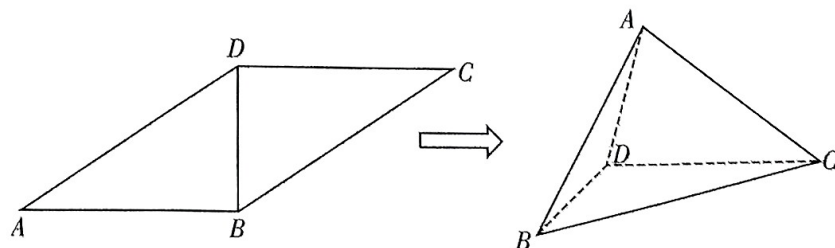
- A. $|PF_1| + |PF_2| = 10$ B. $|PF_1| \cdot |PF_2| + |PO|^2 = 41$
C. $\frac{|PH|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{5}{6}$ D. $\frac{|PH|}{||PF_1| - |PF_2||} = \frac{5}{6}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 写出一个半径为 $\sqrt{13}$, 且与直线 $2x-3y+6=0$ 相切于点 $(3,4)$ 的圆的方程: _____.

13. 已知 a, b, c 成等差数列, 若直线 $l: ax+by+c=0$ 与曲线 $y=e^{x-1}+\ln x-3$ 相切, 则 $\frac{b+c}{a} =$ _____.

14. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=CD=\sqrt{5}, AD=BC=3, BD=2$, 现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 得到三棱锥 $A-BCD$, 且 $AC=\sqrt{6}$, 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 _____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知 $\triangle ABC$, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{4}(b^2 - ab) \tan C$.

(1) 证明: $C = 2A$;

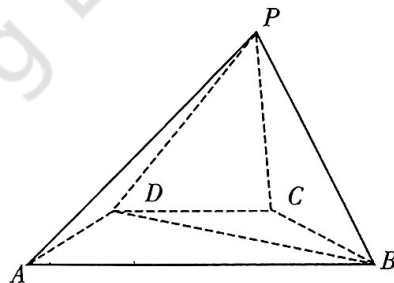
(2) 若 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线, 交 AB 于点 D , 且 $a = \frac{6}{5}$, $CD = 1$, 求 BD 的长.

16. (本小题满分 15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AD = DC = 2$, $AB = 4$, $\triangle PBD$ 为等边三角形, 且平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 作出点 B 在平面 PAD 的射影 E , 并证明;

(2) 求平面 PAB 与平面 PAD 的夹角的余弦值.



17. (本小题满分 15 分)

已知 O 为坐标原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 点 $P(-1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 1$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 Q , 且由点 P, Q, A, B 组成的以 PA 为一边的四边形的面积为 $\frac{9}{2}$, 求 l 的方程.

18. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x < 0$ 时, $f(x) < ax$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有两个不相等的正实数解 x_1, x_2 , 且 $\sqrt{3} - 1 < x_1 < x_2$, 求证: $x_2 -$

$$x_1 < \frac{b + 2be + 4e^2}{2e^2}.$$

19. (本小题满分 17 分)

某商场举行活动, 充值积分若干后, 可以用积分购买特定商品. 参与此活动的商品有 1 积分的签字笔, 2 积分的草稿本和 2 积分的便利贴. 要求每天必须用积分购买商品且每天只能购买一次. 花 2 积分购买草稿本或者购买便利贴算不同的用完积分的方式.

(1) 假设梅菊同学充值 4 积分, 则该同学有多少种方式用完积分 (只写出答案, 不用写过程);

(2) 假设代仕同学有 n 点积分, 该同学用完 n 点积分的方式种数记为 a_n , 求 a_n 表达式;

(3) 设 $b_n = \frac{1}{a_{2n-1}}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $S_n < \frac{4}{3}$.