

湖南名校教育联盟·2025 届高三 12 月大联考

数学参考答案

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】B

【解析】 $A = \{x | 2^x \leq 3\} = \{x | x \leq \log_2 3\}$, $B = \{-1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$, $1 < \log_2 3 < 2$,
 $\therefore A \cap B = \{-1, 1\}$, 选 B.

2. 【答案】C

【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中，其公比 $q = \frac{a_2 + a_5}{a_1 + a_4} = \frac{6}{3} = 2$, 所以 $a_3 + a_6 = q(a_2 + a_5) = 2 \times 6 = 12$,
 所以 $S_6 = (a_1 + a_4) + (a_2 + a_5) + (a_3 + a_6) = 3 + 6 + 12 = 21$, 选 C.

3. 【答案】D

【解析】复数 z_1 在复平面内所对应的点位于第一象限，设 $z_1 = a + bi (a > 0, b > 0)$,

$$\therefore \frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{(1+i)^2} = \frac{2}{2i} = -i, \therefore z_2 = -iz_1 = b - ai, b > 0, -a < 0,$$

$\therefore$ 复数 z_2 在复平面内所对应的点位于第四象限，选 D.

4. 【答案】C

【解析】 $\because (a-b) \perp b, \therefore (a-b) \cdot b = (\cos \theta - 1, 1 - \sin \theta) \cdot (1, \sin \theta) = \cos \theta - 1 + \sin \theta - \sin^2 \theta = 0$,
 $\therefore \cos \theta + \sin \theta = 1 + \sin^2 \theta$,
 $\therefore \frac{3 - \cos 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{3 - \cos 2\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \frac{3 - (1 - 2\sin^2 \theta)}{1 + \sin^2 \theta} = 2$.

5. 【答案】A

【解析】因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x) - f(-x) = \frac{2^x \cdot \sin x}{2^{ax} - 1} - \frac{2^{-x} \cdot \sin(-x)}{2^{-ax} - 1} = \frac{[2^x - 2^{(a-1)x}] \cdot \sin x}{2^{ax} - 1} = 0$,
 又因为 $\sin x$ 不恒等于 0，所以 $2^x = 2^{(a-1)x}$ 恒成立，即 $x = (a-1)x$ 恒成立，所以 $a = 2$.

6. 【答案】B

【解析】由题可知， $g(x) = \cos \left[\omega \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{6} \right] = \cos \left(\omega x - \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$,

$$x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 时, } \omega x - \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} \right).$$

因为 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$ 上单调递减，所以 $\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \leq \pi$, 所以 $\omega \leq 5$,

ω 的最大值为 5.

7. 【答案】A

【解析】连接 PF_1 ，由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4c$, $|F_1F_2| = |PF_2| = 2c$, $\therefore |PF_1| = |PF_2| = 2c$,

$\therefore$ 点 P 为椭圆 C 的上(下)顶点， $\therefore$ 直线 l 的斜率的绝对值 $|k| = \tan \angle PAO = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. 【答案】D

【解析】A: $f'(x) = a \cos x$, 令 $f(x) = f'(x)$, 则 $a \sin x = a \cos x$, 则 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 存在“坚定点”;

B: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow 0$,

$f(x) = \ln ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

所以关于 x 的方程 $\frac{1}{x} = \ln ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一解，存在“坚定点”;

C: $f'(x) = 3x^2 + 4x + a$, 令 $f(x) = f'(x)$, 则 $x^3 + 2x^2 + ax + a = 3x^2 + 4x + a$,

即 $x^3 - x^2 + (a-4)x = 0$, 显然 $x=0$ 是“坚定点”;

D: $f'(x) = ae^{ax}$, 令 $f(x) = f'(x)$, 则 $e^{ax} = ae^{ax}$, 因为 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 所以不存在“坚定点”.

9.【答案】AB

【解析】由 $x > y > 0$, 同除以 xy 得 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, A 选项正确;

由基本不等式 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, 又 $x \neq y$, 所以等号不成立, 所以 $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$, B 选项正确;

由 $f(x) = 0.2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 因为 $x > y > 0$, 所以 $0.2^x < 0.2^y$, C 选项不正确;

取 $x=2, y=\frac{1}{2}$, 得 $\ln x = \ln 2 > 0, \ln y = \ln \frac{1}{2} < 0$, 得 $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{\ln y}$, D 选项不正确.

10.【答案】ACD

【解析】对于 A 选项, 当 $MP \perp AC_1$ 时, $\because AC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1 , $\therefore MP$ 在平面 B_1CD_1 内或 MP 与平面 B_1CD_1 平行, 故当且仅当 M 与 B_1 重合, 且 P 与 C 重合时, $MP \perp AC_1$, A 选项正确;

对于 B 选项, 过 M 在平面 AB_1C_1 内作 AC_1 的平行线, 与底面 $ABCD$ 没有公共点, 故不存在 M, P , 使得 $MP \parallel AC_1$, B 选项不正确;

对于 C 选项, M 为线段 B_1C_1 的中点, 过 M 作与平面 AB_1D_1 平行的截面, 与底面 $ABCD$ 的交线为 $\triangle ABD$ 中 BD 的中位线, 即为动点 P 的轨迹, 其长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, C 选项正确;

对于 D 选项, 设 A_1 关于平面 $ABCD$ 的对称点为 A_0 ,

则 $MP + PA_1 = MP + PA_0 \geq MA_0 = \sqrt{A_1M^2 + A_1A_0^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + 4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$, D 选项正确.

11.【答案】ABD

【解析】对于 A 选项, $|PF_1| + |PF_2| = 10$, 由椭圆定义可知动点 P 的轨迹为椭圆;

对于 B 选项, 设 $P(x, y)$, 则 $(|PF_1| + |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = (x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 2(x^2 + y^2) + 18 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 2|OP|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| + 18 = 82 + 18 = 100$,

$\therefore |PF_1| + |PF_2| = 10$, $\therefore$ 动点 P 的轨迹为椭圆;

对于 C 选项, 设 $P(x, y)$,

则 $\frac{|x|}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}} = \frac{|x|(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2})}{12x} = \frac{5}{6}$,

$\therefore \frac{|x|(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2})}{12|x|} = \frac{5}{6}$, 即 $||PF_1| - |PF_2|| = 10$, 动点 P 的轨迹为双曲线;

对于 D 选项, 设 $P(x, y)$,

则 $\frac{|x|}{|\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}|} = \frac{|x|(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2})}{|12x|} = \frac{5}{6}$,

$\therefore \frac{|x|(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2})}{12|x|} = \frac{5}{6}$, 即 $|PF_1| + |PF_2| = 10$, 动点 P 的轨迹为椭圆.

12.【答案】 $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$ 或 $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 13$ (写 1 个即可)

【解析】设圆心坐标为 (a, b) , 半径为 $\sqrt{13}$, 且与直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 相切于点 $(3, 4)$,

所以 $\begin{cases} \frac{b-4}{a-3} = -\frac{3}{2}, \\ \frac{|2a-3b+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=5, \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1, \\ b=7 \end{cases}$,

所以所求圆的方程为 $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$ 或 $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 13$.

13.【答案】 $-\frac{5}{2}$

【解析】由题意得 $a+c=2b$, 直线 $l: ax+by+(2b-a)=a(x-1)+b(y+2)=0$ 过定点 $(1, -2)$, 且曲线 $y=e^{x-1}+\ln x-3$ 过点 $(1, -2)$, 故直线 l 与曲线 $y=e^{x-1}+\ln x-3$ (无拐点) 相切于点 $(1, -2)$, $\therefore y' = e^{x-1} + \frac{1}{x}$, $\therefore$ 直线 l 的斜率 $k = e^{1-1} + \frac{1}{1} = 2$, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $2x - y - 4 = 0$, $\therefore a:b:c = 2:(-1):(-4)$,

$$\therefore \frac{b+c}{a} = -\frac{5}{2}.$$

法二: 设切点为 $(x_0, e^{x_0-1} + \ln x_0 - 3)$, 则直线 l 的斜率 $k = e^{x_0-1} + \frac{1}{x_0} = \frac{e^{x_0-1} + \ln x_0 - 1}{x_0 - 1}$, $\therefore (x_0 - 2)e^{x_0-1} +$

$$2 - \frac{1}{x_0} - \ln x_0 = 0, \text{ 设 } g(x) = (x-2)e^{x-1} + 2 - \frac{1}{x} - \ln x (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = (x-1)e^{x-1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = (x-1)\left(e^{x-1} - \frac{1}{x^2}\right).$$

$$x \in (0, 1] \text{ 时, } x-1 \leq 0, e^{x-1} - \frac{1}{x^2} \leq 0, g'(x) \geq 0; x \in (1, +\infty) \text{ 时, } x-1 > 0, e^{x-1} - \frac{1}{x^2} > 0, g'(x) > 0,$$

$\therefore g'(x) \geq 0, \therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } g(1) = 0, \therefore (x_0 - 2)e^{x_0-1} + 2 - \frac{1}{x_0} - \ln x_0 = 0 \text{ 有唯一解 } x_0 = 1,$$

所以切点为 $(1, -2)$, $k = 2$, 直线 l 的方程为 $2x - y - 4 = 0$,

$$\therefore a : b : c = 2 : (-1) : (-4), \therefore \frac{b+c}{a} = -\frac{5}{2}.$$

14. 【答案】 $\frac{86\pi}{9}$

【解析】如图, 过 B 作 $BF \parallel CD$, 且 $BF = CD$, 过 D 作 $DE \parallel AB$, 且 $DE = AB$,

连接 AE, AF, CF , 易证三棱柱 $ABF - EDC$ 为直三棱柱.

则三棱锥 $A - BCD$ 与直三棱柱 $ABF - EDC$ 的外接球相同.

在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中, $AC = \sqrt{6}, CF = 2, \therefore AF = \sqrt{2}$.

在 $\triangle ABF$ 中, $AB = BF = \sqrt{5}, AF = \sqrt{2}$,

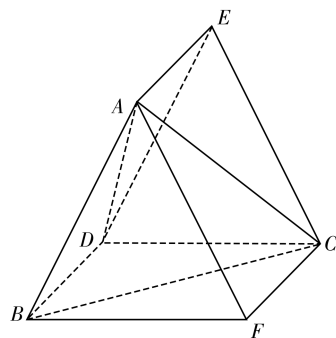
$$\cos \angle BAF = \frac{\frac{1}{2}AF}{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \text{ 所以 } \sin \angle BAF = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{设 } \triangle ABF \text{ 的外接圆半径为 } r, \text{ 由正弦定理得 } 2r = \frac{BF}{\sin \angle BAF} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{5\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{故 } \triangle ABF \text{ 的外接圆半径 } r = \frac{5\sqrt{2}}{6},$$

$$\text{设三棱柱 } ABF - EDC \text{ 的外接球半径为 } R, \text{ 由勾股定理 } R^2 = 1^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{43}{18},$$

$$\text{则三棱锥 } A - BCD \text{ 外接球的表面积 } S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{43}{18} = \frac{86\pi}{9}.$$



15. 【答案】(1) 证明见解析 (2) $BD = \frac{4}{5}$

【解析】(1) 证明: 因为 $S = \frac{1}{4}(b^2 - ab)\tan C = \frac{1}{2}ab\sin C$, 化简得 $2a\cos C = b - a$, 1 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $2\sin A\cos C = \sin B - \sin A$ 3 分

又 $\sin B = \sin(\pi - A - C) = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C$,

所以 $2\sin A\cos C = \sin A\cos C + \cos A\sin C - \sin A$, 整理得 $\sin(C - A) = \sin A$ 6 分

又 A, C 为 $\triangle ABC$ 的内角, 所以 $C - A = A$, 即 $C = 2A$ 7 分

(2) 因为 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线, 且 $C = 2A$, 所以 $\angle ACD = \angle A = \angle DCB$, 所以 $AD = CD = 1$,

$$\text{在等腰三角形 } ACD \text{ 中, } \cos A = \frac{\frac{1}{2}AC}{AD} = \frac{b}{2}. \text{ ①} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}, \therefore \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}b \sin A + \frac{1}{2}a \sin A,$$

化简得 $2ab \cos A = b + a$.

$$\text{又 } a = \frac{6}{5}, \therefore \frac{12}{5}b \cos A = b + \frac{6}{5}. \quad \text{②} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{①代入②, 得 } 6b^2 - 5b - 6 = 0, \text{ 解得 } b = \frac{3}{2} \text{ 或 } b = -\frac{2}{3} \text{ (舍去)}, \therefore \cos A = \frac{b}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中, 由余弦定理得 } BD^2 = CD^2 + a^2 - 2CD \cdot a \cos A = 1 + \frac{36}{25} - 2 \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{16}{25},$$

$$\therefore BD = \frac{4}{5}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

16. 【解析】(1) 在 $\triangle PBD$ 中, 作 $BE \perp PD$, 垂足为 E , 点 E 即为点 B 在平面 PAD 的射影. 下面证明 $BE \perp$ 平面 PAD :

因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, 所以 $\angle ADC = \pi - \angle A$,

在 $\triangle ABD, \triangle BCD$ 中,

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle A = 20 - 16 \cos \angle A,$$

$$BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cos(\pi - \angle A) = 8 + 8 \cos \angle A,$$

$$\text{解得 } \cos \angle A = \frac{1}{2}, BD = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{又 } AD = 2, AB = 4, \therefore AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

$$\therefore AD \perp BD. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PBD \cap$ 平面 $ABCD = BD, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AD \perp$ 平面 PBD ,

又 $BE \perp$ 平面 $PBD, \therefore AD \perp BE$.

又 $BE \perp PD, AD \cap PD = D, AD, PD \subset$ 平面 $PAD, \therefore BE \perp$ 平面 $PAD. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 连接点 P 与 BD 的中点 O , 则 $PO \perp BD$.

又平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PBD \cap$ 平面 $ABCD = BD, PO \subset$ 平面 $PBD, \therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$.

如图, 以 D 为原点, 过点 D 且平行于 PO 的方向为 z 轴, 直线 DA, DB 分别为 x 轴, y 轴建立空间直角坐标系,

$$\text{则 } A(2, 0, 0), B(0, 2\sqrt{3}, 0), P(0, \sqrt{3}, 3). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$, 易知 $\overrightarrow{DA} = (2, 0, 0), \overrightarrow{DP} = (0, \sqrt{3}, 3)$,

$$\text{则 } \begin{cases} 2x = 0, \\ \sqrt{3}y + 3z = 0, \end{cases} \quad \text{取 } z = 1, \text{ 则 } x = 0, y = -\sqrt{3}, \text{ 则 } \mathbf{n}_1 = (0, -\sqrt{3}, 1). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_1, y_1, z_1)$, 易知 $\overrightarrow{AB} = (-2, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AP} = (-2, \sqrt{3}, 3)$,

$$\text{则 } \begin{cases} -2x_1 + 2\sqrt{3}y_1 = 0, \\ -2x_1 + \sqrt{3}y_1 + 3z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_1 = 3, \text{ 则 } y_1 = \sqrt{3}, z_1 = 1, \text{ 则 } \mathbf{n}_2 = (3, \sqrt{3}, 1). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{-2}{2\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{13},$$

$$\text{故平面 } PAB \text{ 与平面 } PAD \text{ 的夹角的余弦值为 } \frac{\sqrt{13}}{13}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

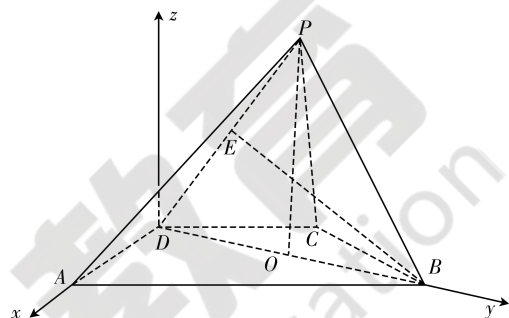
法二: (几何法) 简易思路

过 B 作 $BH \perp PA$, 垂足为 H , 易证 $AP \perp$ 平面 BHE (证明略), 则 $\angle BHE$ 即为所求角. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

在等边三角形 $\triangle PBD$ 中, $BE = 3$

$$\text{在 } \triangle PBA \text{ 中, } AP = AB = 4, PB = 2\sqrt{3}, \text{ 等面积法可求得 } BH = \frac{\sqrt{39}}{2}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin \angle BHE = \frac{BE}{BH} = \frac{6}{\sqrt{39}}, \text{ 又 } \angle BHE \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \cos \angle BHE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}} = \frac{\sqrt{13}}{13}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$



17. 【解析】(1) 由题可知, $k_1 = \frac{\frac{3}{2}}{-1+a}$, $k_2 = \frac{\frac{3}{2}}{-1-a}$, 点 $P(-1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $k_1 + k_2 = 1$.

$$\text{由} \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1, \\ \frac{\frac{3}{2}}{-1+a} + \frac{\frac{3}{2}}{-1-a} = 1, \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2) 设点 $Q(x_0, y_0)$,

① 若点 Q 在 x 轴下方, 则 $y_0 \in [-\sqrt{3}, 0)$, 如图 1 所示,

$$\text{则 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \times \frac{3}{2} = 3.$$

因为点 P, Q, A, B 组成的四边形的面积为 $\frac{9}{2}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |y_0| = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } y_0 = -\frac{3}{4},$$

$$\text{代入椭圆方程得 } x_0 = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}, \text{ 故点 } Q\left(\pm \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{3}{4}\right),$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{2-\sqrt{13}}{2}x + \frac{5-\sqrt{13}}{2} \text{ 或 } y = \frac{2+\sqrt{13}}{2}x + \frac{5+\sqrt{13}}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

② 若点 Q 在 x 轴上方, 则 $x_0 \in (-1, 2), y_0 \in (0, \sqrt{3}]$, 如图 2 所示, 设点 Q 到直线 PB 的距离为 d ,

$$\text{则 } |PB| = \sqrt{(-1-2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \text{ 则 } S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} |PB| d = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } d = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

易知直线 PB 的方程为 $x + 2y - 2 = 0$,

$$\text{由 } d = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ 得 } x_0 + 2y_0 = 0 \text{ 或 } x_0 + 2y_0 = 4.$$

$$\text{联立} \begin{cases} x_0 + 2y_0 = 0, \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_0 = -\sqrt{3}, \\ y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ (舍去) 或 } \begin{cases} x_0 = \sqrt{3}, \\ y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$\text{联立} \begin{cases} x_0 + 2y_0 = 4, \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{2}.$$

$$\text{综上, 直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{2} \text{ 或 } y = \frac{2-\sqrt{13}}{2}x + \frac{5-\sqrt{13}}{2} \text{ 或 } y = \frac{2+\sqrt{13}}{2}x + \frac{5+\sqrt{13}}{2}. \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

18. 【解析】(1) $f'(x) = (x^2 - 2)e^x = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})e^x$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < -\sqrt{2}$ 或 $x > \sqrt{2}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) 当 $x < 0$ 时, $f(x) < ax$ 等价于 $a < \frac{f(x)}{x} = (x-2)e^x$,

设 $g(x) = (x-2)e^x (x < 0)$, 则 $g'(x) = (x-1)e^x < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $a \leq g(0) = -2$. $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

(3) 当 $x < 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 2x)e^x > 0$,

由(1)可知, $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{2})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增,

作出函数 $f(x)$ 的大致图象, 如图. 因为 $f(0) = f(2) = 0$, 所以 $b < 0$, 所以 $\sqrt{3} - 1 < x_1 < \sqrt{2} < x_2 < 2$.

易知曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1, x = 2$ 处的切线分别为 $l_1: y = -ex, l_2: y = 2e^2x - 4e^2$,

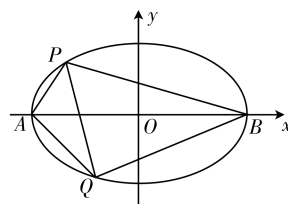


图1

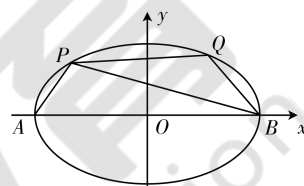


图2

设 $m(x) = f(x) - (-ex) = (x^2 - 2x)e^x + ex$ ($\sqrt{3} - 1 < x < \sqrt{2}$),
 所以 $m'(x) = (x^2 - 2)e^x + e$, 设 $n(x) = (x^2 - 2)e^x + e$ ($\sqrt{3} - 1 < x < \sqrt{2}$),

则 $n'(x) = (x^2 + 2x - 2)e^x > 0$, 所以 $n(x)$ 在 $(\sqrt{3} - 1, \sqrt{2})$ 上单调递增,

因为 $n(1) = 0$, 所以 $x \in (\sqrt{3} - 1, 1)$ 时, $n(x) < 0$; $x \in (1, \sqrt{2})$ 时, $n(x) > 0$,

所以 $m(x)$ 在 $(\sqrt{3} - 1, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, \sqrt{2})$ 上单调递增,

所以 $m(x) \geq m(1) = 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号,

所以 $f(x) \geq -ex$ 在 $x \in (\sqrt{3} - 1, \sqrt{2})$ 上恒成立,

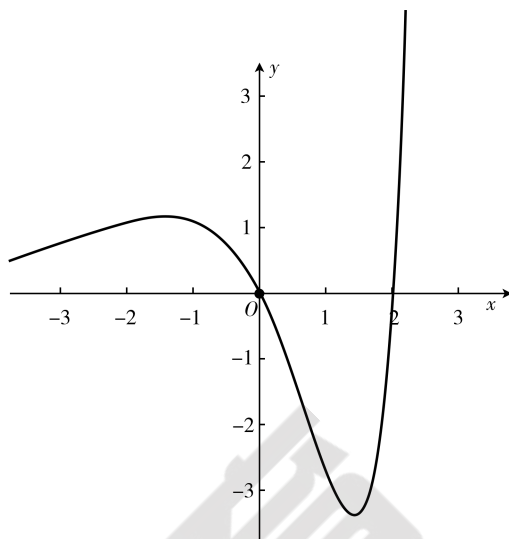
设直线 $y = b$ 与直线 l_1 交点的横坐标为 x'_1 , 则 $-ex'_1 = b$, 则

$$x'_1 = -\frac{b}{e},$$

则 $b = f(x_1) = -ex'_1 \geq -ex_1$, 所以 $x_1 \geq x'_1 = -\frac{b}{e}$.

同理可得 $x_2 < x'_2 = \frac{b + 4e^2}{2e^2}$,

所以 $x_2 - x_1 < x'_2 - x'_1 = \frac{b + 4e^2}{2e^2} - \left(-\frac{b}{e}\right) = \frac{b + 2be + 4e^2}{2e^2}$, 得证. 17 分



19. 【解析】(1) 记用 1 积分购买签字笔为 A , 用 2 积分购买草稿本为 B_1 , 用 2 积分购买便利贴为 B_2 ,

由枚举可知, 该同学用完积分的方式如下:

$\{B_1B_1, B_2B_2, B_1B_2, B_2B_1, B_1AA, B_2AA, AB_1A, AB_2A, AAB_1, AAB_2, AAAA\}$, 共有 11 种. 3 分

(2) 对第一天使用积分购买的商品进行分类:

① 第一天买签字笔, 使用 1 积分, 余下的 $(n-1)$ 积分在以后用完, 种数为 a_{n-1} ,

② 第一天买草稿本或便利贴, 使用 2 积分, 余下的 $(n-2)$ 积分在以后用完, 种数为 a_{n-2} ,

所以 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ($n \geq 3$), 所以 $a_n + a_{n-1} = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$ ($n \geq 3$), 6 分

因为 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 所以 $a_n + a_{n-1} = 2(a_{n-1} + a_{n-2}) = 2^2(a_{n-2} + a_{n-3}) = \dots = 2^{n-2}(a_2 + a_1) = 2^n$,

所以 $a_n - \frac{2}{3} \times 2^n = -(a_{n-1} - \frac{2}{3} \times 2^{n-1})$, 因为 $a_1 - \frac{2}{3} \times 2^1 = -\frac{1}{3}$,

所以 $\{a_n - \frac{2}{3} \times 2^n\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项, -1 为公比的等比数列,

所以 $a_n - \frac{2}{3} \times 2^n = -\frac{1}{3} \times (-1)^{n-1}$, 所以 $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$ 10 分

(3) 由题可知 $b_n = \frac{1}{a_{2n-1}} = \frac{3}{2^{2n}-1} = \frac{3}{4^n-1}$,

法一: 易知当 $n=1$ 时, $S_1 = b_1 = 1 < \frac{4}{3}$.

当 $n \geq 2$ 时, 因为 $b_n = \frac{3}{4^n-1} < \frac{3}{4^n-4} = \frac{3}{4(4^{n-1}-1)} = \frac{1}{4}b_{n-1}$,

所以 $b_n < \frac{1}{4}b_{n-1} < \frac{1}{4^2}b_{n-2} < \dots < \frac{1}{4^{n-1}}b_1 = \frac{1}{4^{n-1}}$,

所以 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n < 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) < \frac{4}{3}$ 17 分

法二: 易知当 $n=1$ 时, $S_1 = b_1 = 1 < \frac{4}{3}$.

当 $n \geq 2$ 时, 因为 $b_n = \frac{3}{4^n-1} = \frac{3}{4 \cdot 4^{n-1}-1} = \frac{3}{3 \times 4^{n-1} + (4^{n-1}-1)} < \frac{3}{3 \times 4^{n-1}} = \frac{1}{4^{n-1}}$,

所以 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n < 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) < \frac{4}{3}$ 17 分