

2024~2025 学年度上期高 2023 级期末联考

数 学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，已知点 $M(-4, 2, -3)$ ，点 $N(-1, -2, 2)$ ，则 $|\overline{MN}| =$
- A. $2\sqrt{13}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 7 D. $5\sqrt{2}$
2. 从 81 个人中选取 5 个人参加数学竞赛，采用简单随机抽样法抽取，可以先用抽签法从中剔除 1 个人，再在剩余的 80 个人中随机抽取 5 个人。下列四种说法中错误的是
- A. 这种抽样方法对于被剔除的个体是公平的
- B. 每个人在整个抽样过程中被抽到的机会均等
- C. 无法判断每个人被抽到的可能性是多少
- D. 每个人被抽到的可能性是确定的
3. 若直线经过点 $A(1, -3\sqrt{3})$ ，且倾斜角为直线 $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ 的倾斜角的一半，则该直线的方程为
- A. $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$ B. $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$
- C. $x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$ D. $\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3} = 0$
4. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1 ， F_2 ，点 P 在双曲线上，且 $|PF_1| = 4|PF_2|$ ，则 $|PF_2| =$
- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
5. 《西厢记》、《牡丹亭》、《桃花扇》和《长生殿》是中国古典文学瑰宝，并称为中国四大古典名剧，现在由于书店里《牡丹亭》缺货，甲、乙两人只能在剩余三种书里随机选取两种购买，则他们购买的两种书中恰好有一种相同的概率为
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

6. 行列式是解决复杂代数运算的算法，二阶行列式的运算法则如下：

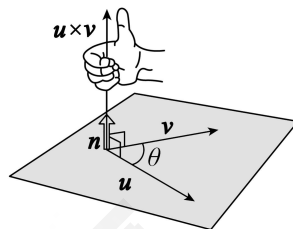
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1, \text{ 在空间直角坐标系 } Oxyz \text{ 中, 定义两个向量 } \mathbf{u} \text{ 与 } \mathbf{v} \text{ 的向量积 } \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

是一个向量, 它的模 $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, 它的方向与 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 同时垂直, 且以 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 的顺序符合右手法则 (如图), 若 $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

据上述知识, 解决下面问题: 已知 $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$,

$\overrightarrow{AC} = (2, 1, 2)$, 则 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, $\triangle ABC$ 的面积分别为



A. $(-4, 2, 3)$, $\sqrt{29}$

B. $(-4, 2, 3)$, $\frac{\sqrt{29}}{2}$

C. $(4, -2, 3)$, $\sqrt{29}$

D. $(4, -2, 3)$, $\frac{\sqrt{29}}{2}$

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 直线 $x = t (t \neq 0)$ 交椭圆 C 于 M, N 两点, 设直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{4}$, 则椭圆 C

的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

8. 若点 $A(a, b)$ 是圆 $C: x^2 + y^2 = 2$ 上任意一点, 且满足 $|a - b + 3| + |a - b + m|$ 的值与 a, b 无关, 则实数 m 的取值范围为

A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2]$

D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求; 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知一组数据如下: 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 则下列四种说法中正确的有

A. 这组数据的极差为 5

B. 这组数据的平均数为 3.5

C. 这组数据的众数为 3

D. 这组数据的第 70 百分位数为 4

10. 过点 $M(3, 0)$ 的直线 l 与圆 $C: x^2 + (y - 1)^2 = 16$ 交于 P, Q 两点, 线段 $|PQ|$ 长为 $2\sqrt{7}$, 则直线 l 的方程为

A. $y = 0$

B. $x = 3$

C. $3x - 4y - 9 = 0$

D. $4x - 3y - 12 = 0$

11. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点, 过点 F_2 且倾斜角为 θ 的直线与双曲线的右支交于 A, B 两点, 记 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆 O_1 的半径为 r_1 , $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆 O_2 的半径为 r_2 , 则下列说法中正确的有

- A. θ 的取值范围为 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ B. 圆心 O_1, O_2 在直线 $x = 2$ 上
C. r_1 的取值范围为 $[2, 2\sqrt{3})$ D. $|O_1O_2|$ 的取值范围为 $[4, \frac{8\sqrt{3}}{3})$

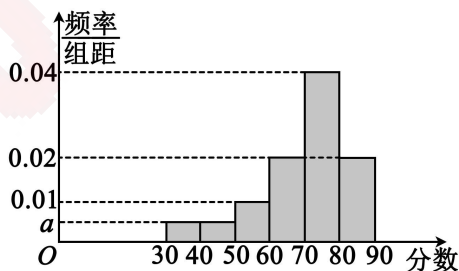
三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知 e_1, e_2, e_3 不共面, 若 $\overrightarrow{AB} = e_1 + 2e_2 + e_3, \overrightarrow{BC} = xe_1 + ye_2 + 2e_3, x, y \in \mathbf{R}$, 且 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$, 则 $x + y =$ _____.
13. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 是线段 CD 的中点, 则平面 AMD_1 与平面 AMC_1 夹角的余弦值为 _____.
14. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$ 有公共焦点, F_1, F_2 分别为左、右焦点, 且两条曲线在第一象限的交点为 P . 若椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的离心率分别为 e_1 和 e_2 , 且 $e_1 = \frac{2}{5}, e_2 = 2$, 则 $\cos \angle F_1PF_2 =$ _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

某地区对国产品牌电动汽车的 1 000 名驾驶员做了一次关于电动汽车性能实用性的问卷调查, 现在从中随机抽取了 100 名驾驶员, 记录他们的调查评分, 将数据按 $[30, 40), [40, 50), \dots, [80, 90]$ 分成 6 组, 并整理得到如图所示的频率分布直方图。



- (1) 求 a 的值, 并估计总体评分的众数;
- (2) 用样本的频率估计概率, 从样本中随机抽取 2 人记为甲、乙, 若每次抽取的结果互不影响, 求抽取的 2 人中至少有 1 人的分数在 $[70, 80)$ 内的概率。

16. (15 分)

已知双曲线方程 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线互相垂直, 右焦点 F 到一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 若直线 l 过点 $M(2,1)$ 交双曲线 C 于 A, B 两点, 当 M 为 AB 的中点时, 求弦 AB 的长度.

17. (15 分)

古希腊数学家阿波罗尼斯发现: 在平面上给定两个定点 M 和 N , 所有满足到 M 和 N 的距离之比为定值 $\lambda (\lambda \neq 1)$ 的点 P 的轨迹形成一个圆, 就是阿波罗尼斯圆, 也叫阿氏圆.

如果平面内动点 P 到两个定点 $M(-4,0)$ 和 $N(-1,0)$ 的距离之比 $\frac{|PM|}{|PN|}$ 为定值 2, 则点 P 的轨迹就是阿氏圆, 记为 O .

(1) 求阿氏圆 O 的方程;

(2) 点 Q 为直线 $l: 3x - 2y + 13 = 0$ 上一动点, 过点 Q 作圆 O 的切线, 切点为 A 和 B , 当弦 AB 最短时, 求此时弦 AB 所在的直线方程和 $\triangle QAB$ 的面积.

18. (17 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 长轴的长为 4, 过点 F_2 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 所截得的弦长为 2.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) A 是椭圆 C 的左顶点, P, Q 是椭圆 C 上异于 A 的两点, 直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 满足 $k_1 \cdot k_2 = -1$, 求证: 直线 PQ 恒过定点.

19. (17 分)

已知体积为 72 的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{SM} = p\overline{SB}$, $\overline{SN} = q\overline{SD}$, $\overline{SE} = m\overline{SA}$, $\overline{SF} = n\overline{SC}$, $p, q, m, n \in (0,1]$, 且点 M, N, E, F 共面.

(1) 当 $p = q = m = \frac{1}{2}$ 时, 求四棱锥 $S-EMFN$ 的体积;

(2) 求证: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$;

(3) 当 $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{2}$ 时, 记四棱锥 $S-EMFN$ 的体积为 V , 求 V 的最小值.

