

2024~2025 学年度上期高 2023 级期末联考 数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	D	A	C	B	B	C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求；全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
AC	BD	BD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 6 13. $\frac{2}{3}$ 14. $\frac{3}{4}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

解：(1) $(a + a + 0.01 + 0.02 + 0.04 + 0.02) \times 10 = 1$,

$\therefore a = 0.005$,3 分

由频率分布直方图可估计总体评分的众数为 $\frac{70+80}{2} = 75$;6 分

(2) 根据题意，设事件 $A =$ “甲的分数在 $[70, 80)$ 内”，事件 $B =$ “乙的分数在 $[70, 80)$ 内”，

则 $P(A) = P(B) = 0.04 \times 10 = 0.4$,8 分

① 设事件 $P_1 =$ “抽取的 2 人中有 1 人的分数在 $[70, 80)$ 内” $= (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B)$ ，且 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互斥，
根据概率的加法公式和事件独立性定义，

得 $P_1 = P(A\bar{B}) \cup P(\bar{A}B) = 0.4 \times (1 - 0.4) + (1 - 0.4) \times 0.4 = 0.48$,10 分

② 设事件 $P_2 =$ “抽取的 2 人中 2 人的分数都在 $[70, 80)$ 内” $= AB$,

由事件独立性定义，得 $P_2 = P(AB) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$,11 分

$\therefore$ 抽取的 2 人中至少有 1 人的分数在 $[70, 80)$ 内的概率为

$P = P_1 + P_2 = 0.48 + 0.16 = 0.64$13 分

16. (15 分)

解：(1) 依题意，双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

$\therefore$ 两条渐近线互相垂直，

$\therefore -\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = -1$, 即 $a = b$,2 分

又 $\therefore$ 右焦点 F 到一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$,

即 $b = \sqrt{2}$,4 分

$\therefore$ 双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$;6 分

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(2, 1)$ 为 AB 中点,

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = 2, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 4, \quad y_1 + y_2 = 2, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由题可知: } \frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1,$$

$$\text{两式相减并化简得直线 } AB \text{ 的斜率 } k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程为 } y - 1 = 2(x - 2),$$

$$\text{即 } 2x - y - 3 = 0,$$

把直线 AB 的方程代入双曲线 C 的方程,

$$\text{得 } 3x^2 - 12x + 11 = 0, \quad x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 x_2 = \frac{11}{3},$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1+2^2} \times \sqrt{4^2 - 4 \cdot \frac{11}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. (15 分)

解: (1) 设点 $P(x, y)$, 根据 $\frac{|PM|}{|PN|} = 2$,

$$\text{得 } (x+4)^2 + y^2 = 4[(x+1)^2 + y^2], \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{即圆 } O: x^2 + y^2 = 4; \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 过直线 l 上一动点作圆 O 的切线, 切点为 A 和 B , 弦 AB 最短时, Q 为直线 l 上离圆心最近的点,
 $\therefore$ 直线 OQ 与直线 l 垂直, 斜率乘积为 -1 ,

$$\therefore \text{直线 } OQ \text{ 的斜率为 } -\frac{2}{3},$$

$$\text{则直线 } OQ \text{ 的方程由点斜式可得为 } 2x + 3y = 0, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{联立方程 } \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 3x - 2y + 13 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = -3, \\ y = 2 \end{cases},$$

$$\text{故交点坐标为 } Q(-3, 2), \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

连接 OA , OB , 则 $OA \perp QA$, $OB \perp QB$,

则 $QAOB$ 四点共圆, 记为圆 C , 且以点 Q , O 为直径端点,

利用 QO 的中点 $C(-\frac{3}{2}, 1)$ 为圆心, $|CQ|$ 为半径,

$$\text{该圆的方程为 } C: (x + \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{13}{4}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

圆 O 和圆 C 方程作差,

得到公共弦 AB 所在直线方程 $l_{AB}: 3x - 2y + 4 = 0$,

(也可利用切点弦公式可得 $l_{AB}: 3x - 2y + 4 = 0$) $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{再利用圆心到直线距离公式得到 } O \text{ 到 } l_{AB} \text{ 的距离为 } d_1 = \frac{4}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{4\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore |AB| = 2\sqrt{R^2 - d_1^2} = \frac{12\sqrt{13}}{13}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{又点 } Q \text{ 到 } l_{AB} \text{ 的距离 } d_2 = \frac{|3 \times (-3) - 2 \times 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}, \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\therefore \triangle QAB \text{ 的面积为 } S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} \times \frac{9\sqrt{13}}{13} \times \frac{12\sqrt{13}}{13} = \frac{54}{13}.$$

(也可以先求出 $|QA| = \sqrt{|QO|^2 - R^2} = \sqrt{13 - 4} = 3$, $S_{\triangle QOA} = \frac{|OA| \times |QA|}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$, 利用

$$S_{\triangle QAB} = 2S_{\triangle QOA} - S_{\triangle OAB} = 6 - \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{13}}{13} \times \frac{12\sqrt{13}}{13} = \frac{54}{13} \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

18. (17 分)

解: (1) $2a = 4$, $\frac{2b^2}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由题意可知直线 PQ 的斜率不为 0, 设直线 PQ 的方程为 $x = my + n$,

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$,

得: $(m^2 + 2)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0$,

需满足 $\Delta = 8(2m^2 - n^2 + 4) > 0$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 2}$,

又 $\because A(-2, 0)$, $k_{AQ} \cdot k_{AP} = -1$,

$\therefore \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 + 2} = -1$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$y_1 y_2 + (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 0$,

$y_1 y_2 + (my_1 + n + 2)(my_2 + n + 2) = 0$,

得 $(m^2 + 1)y_2 y_1 + m(n + 2)(y_1 + y_2) + (n + 2)^2 = 0$,

即 $(m^2 + 1) \cdot \frac{n^2 - 4}{m^2 + 2} + m(n + 2) \left(-\frac{2mn}{m^2 + 2}\right) + (n + 2)^2 = 0$,

整理得 $3n^2 + 8n + 4 = 0$, 解得 $n = -\frac{2}{3}$, 或 $n = -2$, $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

当 $n = -2$ 时, $x = my - 2$, 直线 PQ 过点 A , 不符合题意,

当 $n = -\frac{2}{3}$ 时, $x = my - \frac{2}{3}$, 直线 PQ 恒过定点 $T(-\frac{2}{3}, 0)$. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

19. (17 分)

解: (1) 当 $p = q = m = \frac{1}{2}$ 时, 易知 $n = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 点 M , N , E , F 分别为线段 SB , SD , SA , SC 的中点, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\therefore$ 四棱锥 $S - EMFN$ 的体积 $= (\frac{1}{2})^3 V_{S-ABCD} = 9$; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 证明: $\because \overline{AB} = \overline{DC}$, $\therefore \overline{SB} - \overline{SA} = \overline{SC} - \overline{SD}$,

$$\therefore \overline{SB} = \overline{SA} + \overline{SC} - \overline{SD}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \overline{SM} = p\overline{SB}, \quad \overline{SN} = q\overline{SD}, \quad \overline{SE} = m\overline{SA}, \quad \overline{SF} = n\overline{SC},$$

$$\therefore \frac{1}{p}\overline{SM} = \frac{1}{m}\overline{SE} + \frac{1}{n}\overline{SF} - \frac{1}{q}\overline{SN},$$

$$\therefore \overline{SM} = \frac{p}{m}\overline{SE} + \frac{p}{n}\overline{SF} - \frac{p}{q}\overline{SN}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

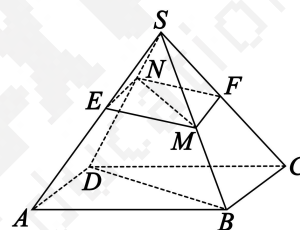
$\therefore$ 点 M, N, E, F 共面, 且 $\overline{SE}, \overline{SF}, \overline{SN}$ 不共面,

$$\therefore \frac{p}{m} + \frac{p}{n} - \frac{p}{q} = 1, \quad \therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}, \quad \therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}; \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(3) 当 $m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{2}$ 时, 由 (2) 知 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 6$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\therefore$ 连接 MN, BD , 设点 E, A 到平面 SBD 的距离分别为 h_E, h_A , 则

$$\begin{aligned} V_{S-EMN} &= V_{E-SMN} = \frac{1}{3}h_E \times S_{\triangle SMN} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}h_A \times \frac{1}{2} \times p|SB| \times q|SD| \times \sin \angle MSN \\ &= \frac{1}{4}pq \times \frac{1}{3} \times h_A \times \frac{1}{2} \times |SB| \times |SD| \times \sin \angle BSD \\ &= \frac{1}{4}pq \times \frac{1}{3} \times h_A \times S_{\triangle SBD} \\ &= \frac{1}{4}pqV_{A-SBD} \\ &= \frac{1}{4}pqV_{S-ABD}, \end{aligned}$$



$$\text{同理 } V_{S-FMN} = \frac{1}{2}pqV_{S-CBD}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{DC},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 为平行四边形, } \therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD},$$

$\therefore$ 四棱锥 $S-EMFN$ 的体积为

$$V_{S-EMFN} = V_{S-EMN} + V_{S-FMN} = \frac{1}{4}pqV_{S-ABD} + \frac{1}{2}pqV_{S-CBD} = \frac{3}{8}pqV_{S-ABCD}, \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 6 \geq 2\sqrt{\frac{1}{pq}}, \quad p, q \in (0, 1],$$

$$\therefore pq \geq \frac{1}{9},$$

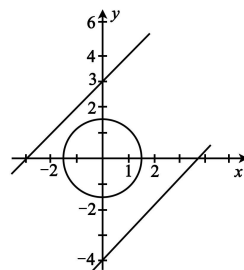
$$\therefore \frac{3}{8}pqV_{S-ABCD} \geq \frac{3}{8} \times \frac{1}{9} \times 72 = 3, \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$\therefore$ 四棱锥 $S-EMFN$ 的体积 $V \geq 3$, 当且仅当 $p = q = \frac{1}{3}$ 时取等号,

$\therefore V$ 的最小值为 3. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

解析:

- 解: $\overrightarrow{MN} = (-1, -2, 2) - (-4, 2, -3) = (3, -4, 5)$ $\therefore |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; 故选 D.
- 解: 由于第一次剔除时采用抽签法, 对每个人来说可能性相等, 然后随机抽取 5 个人对每个人的机会也是均等的, 所以总的来说每个人被抽到的机会都是均等的, 被抽到的可能性都是相等且确定的; 故选 C.
- 解: 由 $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ 得此直线的斜率为 $-\sqrt{3}$, $\therefore$ 倾斜角为 120° , 故所求直线的倾斜角为 60° , $\therefore$ 所求直线的斜率为 $\sqrt{3}$, 又直线过点 $A(1, -3\sqrt{3})$, $\therefore$ 所求直线方程为 $y + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 1)$, 即 $\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3} = 0$; 故选 D.
- 解: 由题知点 P 在双曲线右支上, 根据双曲线的定义得 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, $\therefore a^2 = 9$, $|PF_1| = 4|PF_2|$, $\therefore 3|PF_2| = 2a$, 即 $|PF_2| = 2$, 又 $\therefore |PF_2| \geq c - a = 5 - 3 = 2$, $\therefore |PF_2| = 2$ 满足题意; 故选 A.
- 解: 用字母 A 表示《西厢记》, 字母 B 表示《桃花扇》, 字母 C 表示《长生殿》.
法一: 甲购买任意两种书假设表示为 AB , 乙购买的书有 AB, AC, BC 三种情况, 当中 AC, BC 这两种情况和甲有一种书相同, $\therefore$ 概率为 $P = \frac{2}{3}$;
法二: 甲购买任意两种书有 AB, AC, BC 三种情况, 乙购买任意两种书也有 AB, AC, BC 三种情况, 列表或者树状图共计 9 种, 恰好有一种书相同的有 $(AB, AC), (AB, BC), (AC, AB), (AC, BC), (BC, AB), (BC, AC)$ 共计 6 种情况, $\therefore$ 概率为 $P = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$;
法三: 甲购买任意两种书有 AB, AC, BC 三种情况, 乙购买任意两种书也有 AB, AC, BC 三种情况, 列表或者树状图共计 9 种情况, 甲、乙购买时有两种书完全相同和只有一种书相同两种情况, 而完全相同只有 $(AB, AB), (AC, AC), (BC, BC)$ 三种情况, $\therefore$ 恰好有一种书相同的概率为 $P = 1 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$; 故选 C.
- 解: 由行列式运算法则知 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 2, 3)$, 由向量积模的定义知 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$; 故选 B.
- 解: 法一: $A(-a, 0), B(a, 0), M(x_1, y_1), N(x_1, -y_1), k_1 = \frac{y_1}{x_1 + a}, k_2 = \frac{-y_1}{x_1 - a}, k_1 \cdot k_2 = \frac{y_1^2}{a^2 - x_1^2}$ ①,
 $\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)$, 代入①得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - e^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
法二: 椭圆第三定义 $k_{MA} \cdot k_{MB} = e^2 - 1$, $\therefore k_{MB} = -k_{NB}$, $\therefore k_1 \cdot (-k_2) = e^2 - 1, e^2 - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
故选 B.
- 解: 由点到直线的距离公式知点 $A(a, b)$ 到直线 $x - y + 3 = 0$ 与直线 $x - y + m = 0$ 的距离分别是
 $d_1 = \frac{|a - b + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - b + 3|}{\sqrt{2}}$ 与 $d_2 = \frac{|a - b + m|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - b + m|}{\sqrt{2}}$,
 $\therefore |a - b + 3| + |a - b + m| = \sqrt{2}(d_1 + d_2)$, 即 $|a - b + 3| + |a - b + m|$ 表示点 $A(a, b)$ 到直线 $x - y + 3 = 0$ 与直线 $x - y + m = 0$ 的距离之和的 $\sqrt{2}$ 倍. $\therefore |a - b + 3| + |a - b + m|$ 的值与 a, b 无关, 如图所示, 圆 $C: x^2 + y^2 = 2$ 在平行线 $x - y + 3 = 0$ 与 $x - y + m = 0$ 之间, 且直线 $x - y + m = 0$ 与圆相离或相切, 即圆心 $(0, 0)$ 到 $x - y + m = 0$ 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{2}} \geq r = \sqrt{2}$, $\therefore m \geq 2$ 或 $m \leq -2$, 又 $\therefore$ 两直线在圆的两侧, $\therefore (0 - 0 + 3)(0 - 0 + m) < 0$, $\therefore m < 0$. 综上, $m \leq -2$; 故选 C.



9. 解: 对于 A: 这组数据的极差为 $6-1=5$, 故 A 正确;

对于 B: 这组数据的平均数为 $\frac{1+2+3+3+3+3+4+4+5+5+6}{10}=3.6$, 故 B 错误;

对于 C: 这组数据中出现次数最多的数是 3, $\therefore$ 这组数据的众数为 3, 故 C 正确;

对于 D: $\because 10 \times 70\% = 7$, $\therefore$ 这组数据的第 70 百分位数为第 7 个数和第 8 个数的平均数: 4.5, 故 D 错误;

故选 AC.

10. 解: 当斜率 k 存在时, 令直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$, 根据勾股定理 $\frac{|PQ|}{2} = \sqrt{R^2 - d^2}$ 得圆心到直线 l

的距离 $d=3$, $\therefore d = \frac{|-1-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 3$, 则 $k = \frac{4}{3}$, $\therefore$ 直线 $l: 4x-3y-12=0$;

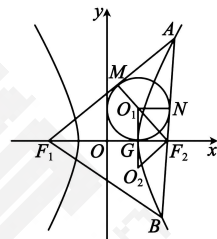
当斜率 k 不存在时, 直线 l 的方程为 $x=3$, 经检验圆心到直线 l 的距离为 3, 满足题意;
综上所述, 直线 l 的方程为 $x=3$ 或 $4x-3y-12=0$; 故选 BD.

11. 解: 对于 A: 由切线长定理及双曲线的定义即可求得 $O_1O_2 \perp x$, $\therefore$ 直线与双曲线

的右支交于 A, B 两点, $\therefore \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$, 故 A 错误;

对于 B: 设圆 O_1 切 AF_1, AF_2, F_1F_2 分别切于点 M, N, G ,

$\therefore |AF_1| - |AF_2| = 2a = 4$, $|AM| = |AN|$, $\therefore |MF_1| - |NF_2| = 4$,
 $\therefore |MF_1| = |GF_1|$, $\therefore |NF_2| = |GF_2|$, $\therefore |F_1G| - |F_2G| = 4$, 设右顶点为 $P(a, 0)$, $\therefore |F_1P| - |F_2P| = (c+a) - (c-a) = 2a = 4$, $\therefore$ 点 G 与点 P 重合, 即圆心 O_1, O_2 在直线 $x=2$ 上, 故 B 正确;



对于 C: 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{3}$,

$\therefore |GF_2| = c - a = 4 - 2 = 2$, $\frac{|O_1G|}{|GF_2|} = \tan \frac{\pi - \theta}{2}$, $\frac{|O_2G|}{|GF_2|} = \tan \frac{\theta}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan \frac{\theta}{2} < \sqrt{3}$

$r_1 = \frac{2}{\tan \frac{\theta}{2}} \in (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3})$, 故 C 错误;

对于 D: $|O_1O_2| = |O_1G| + |O_2G| = 2 \tan \frac{\pi - \theta}{2} + 2 \tan \frac{\theta}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\pi - \theta}{2}}{\cos \frac{\pi - \theta}{2}} + 2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$
 $= 2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + 2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = 2 \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{4}{\sin \theta}$, $\therefore \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \sin \theta \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$,
 $\therefore \frac{4}{\sin \theta} \in [4, \frac{8\sqrt{3}}{3})$, 故 D 正确;

故选 BD.

12. 解: $\because \overline{AB} // \overline{BC}$, $\therefore$ 由 e_1, e_2, e_3 不共面及空间向量基本定理知 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, 得 $x=2, y=4, \therefore x+y=6$.

13. 解: 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 不妨设 $|DA|=2$, 则 $A(2, 0, 0), M(0, 1, 0), D_1(0, 0, 2), C_1(0, 2, 2)$, 易得平面 AMD_1 , 平面 AMC_1 的法向量分别为 $m=(1, 2, 1), n=(1, 2, -1)$, $\therefore$ 平面 AMD_1 与平面 AMC_1 夹角的余弦值为

$$|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{3}.$$

14. 解: 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 记 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 根据定义 $\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a_1 \\ |PF_1| - |PF_2| = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |PF_1| = a_1 + a_2 \\ |PF_2| = a_1 - a_2 \end{cases}$, 由余弦定理有

$(2c)^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)\cos \theta$, 整理得 $2c^2 = a_1^2 + a_2^2 - (a_1^2 - a_2^2)\cos \theta$, 两边同时除以 c^2 , 可得 $2 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} - (\frac{1}{e_1^2} - \frac{1}{e_2^2})\cos \theta$, $\frac{1 - \cos \theta}{e_1^2} + \frac{1 + \cos \theta}{e_2^2} = 2$, $\therefore \cos \theta = \frac{e_1^2 + e_2^2 - 2e_1^2e_2^2}{e_2^2 - e_1^2}$,

将 $e_1 = \frac{2}{5}, e_2 = 2$ 代入, 得 $\cos \theta = \frac{3}{4}$.