

2024~2025 学年度上期期末高一年级调研考试

数学参考答案及评分意见

一、选择题：(每小题 5 分，共 40 分)

1. D 2. B 3. A 4. B 5. D 6. C 7. A 8. C

二、选择题：(每小题 6 分，共 18 分)

9. BD 10. BCD 11. ABD

三、填空题：(每小题 5 分，共 15 分)

12. (0, 1) 13. 10^3 14. $e-2; (\ln 2, 1]$

四、解答题：(共 77 分)

15. 解：(1) 化简， $A = \{x | (x-4)(x+1) < 0\} = \{x | -1 < x < 4\}$ 2 分所以 $\complement_U A = \{x | x \leq -1, \text{ 或 } x \geq 4\}$ 4 分当 $m=3$ 时， $B = \{x | 0 < x-3 \leq 2\} = \{x | 3 < x \leq 5\}$ 5 分所以 $(\complement_U A) \cap B = \{x | 4 \leq x \leq 5\}$ 7 分(2) 因为 $B = \{x | m < x \leq m+2\}$ 8 分又 $A \cup B = A$ 等价于 $B \subseteq A$ 9 分所以 $\begin{cases} m \geq -1, \\ m+2 < 4. \end{cases}$ 11 分解得 m 的取值范围是 $[-1, 2)$ 13 分16. 解：(1) $f(0) = (1+1)^2 - 0 = 4$; 2 分 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{12} - \frac{1}{12} = 4$; 4 分 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)^2 - 1^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$; 6 分 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 - (\sqrt{3})^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4$ 8 分(2) 发现结论： $f(x) = \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 - \tan^2 x \cdot \sin^2 x = 4$ 10 分下面给予证明： $\forall x \in \mathbf{R}$ ，且 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ，有

$$f(x) = \cos^2 x + 2 + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x + 2 + \frac{1 - \sin^4 x}{\cos^2 x}$$

$$= \cos^2 x + 2 + \frac{(1 + \sin^2 x)(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \cos^2 x + 2 + (1 + \sin^2 x)$$

$$= 4.$$

.....15 分

17. 解：(1) 在曲线段 OA 中，由 $\begin{cases} f(0) = \log_a b = 0, \\ f(3) = \log_a (3+b) = 2. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b = a^0, \\ a^2 = 3+b. \end{cases}$ 2 分

又 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ，解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$ 3 分

设射线 $AB: f(x) = kx + m (x \geq 3)$ ，由 $\begin{cases} f(3) = 3k + m = 2, \\ f(5) = 5k + m = 0. \end{cases}$ 5 分

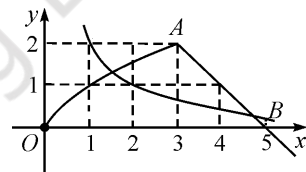
解得 $\begin{cases} k = -1, \\ m = 5. \end{cases}$ 6 分

故所求解析式为 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & 0 \leq x < 3, \\ 5-x, & x \geq 3. \end{cases}$ 7 分

(2) 函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的大致图象如右。9 分

从“形”的角度直观判断：

因为函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象有且仅有两个交点，



所以方程 $f(x) = \frac{2}{x}$ ，即 $x \cdot f(x) = 2 (x > 0)$ 有且仅有 2 个不等实根。11 分

从“数”的角度严格论证如下：

显然 $x \neq 0$ ，只考虑 $x > 0$ 的情形。

① 当 $x \in (0, 3)$ 时，函数 $g(x) = f(x) - \frac{2}{x} = \log_2(x+1) - \frac{2}{x}$ 在 $(0, 3)$ 上单调递增。12 分

而且 $g(1) = 1 - 2 = -1 < 0$ ， $g(2) = \log_2 3 - 1 > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, 3)$ 有且仅有一个零点。

所以方程 $f(x) = \frac{2}{x}$ ，即 $x \cdot f(x) = 2$ 在 $(0, 3)$ 有且仅有 1 个实根。13 分

② 当 $x \in [3, +\infty)$ 时，由 $x \cdot f(x) = 2$ ，得 $x(5-x) = 2$ ，即 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 。14 分

解得 $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ ，或 $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ (舍去)。

所以方程 $x \cdot f(x) = 2 (x > 0)$ 在 $[3, +\infty)$ 有且仅有 1 个实根。

(或解:因为函数 $h(x)=x^2-5x+2$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增.14 分

且 $h(4)=-2<0, h(5)=2>0$, 所以 $h(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 有且仅有一个零点 $x_0 \in (4,5)$.)

综上所述,方程 $x \cdot f(x)=2$ 有且仅有 2 个不等实根.15 分

18. 解:(1)由题意, $900(ab+2 \times 3b)+600 \times 3a=32\,400$3 分

化简,得 a 与 b 满足的关系式为: $ab+6b+2a=36$, 其中 $0<a \leq 8, 0<b \leq 3$5 分

(2)由 $a=\frac{6(6-b)}{b+2}=6(\frac{8}{b+2}-1)$, 得 $S=3a=18(\frac{8}{b+2}-1)$7 分

易知 S 是关于 b 的减函数, 所以当 b 取最大值 3 m 时, S 取最小值 10.8 m^29 分

故仓库占地面积 S 的最小值为 10.8 m^2 , 此时 $a=3.6 \text{ m}, b=3 \text{ m}$10 分

(3)法 1: 由 $ab+6b+2a=36$, 得 $2(a+3b)=36-ab$11 分

因为 $a+3b \geq 2\sqrt{3ab}$ (当且仅当 $a=3b$ 时取等号).13 分

所以 $36-ab \geq 4\sqrt{3ab}$, 故 $(\sqrt{ab}+6\sqrt{3})(\sqrt{ab}-2\sqrt{3}) \leq 0$15 分

解得 $\sqrt{ab} \leq 2\sqrt{3}$, 故 $ab \leq 12$ (当且仅当 $a=6, b=2$ 时取等号).16 分

所以仓库容积 $V=3ab$ 的最大值为 36 m^3 时, 此时 $a=6 \text{ m}, b=2 \text{ m}$17 分

法 2: 由 $a=6(\frac{8}{b+2}-1)$, 得 $V=3ab=18(\frac{8}{b+2}-1)b$11 分

故 $V=18(\frac{8}{b+2}-1)[(b+2)-2]=18[10-(b+2)-\frac{16}{b+2}]$13 分

因为 $(b+2)+\frac{16}{b+2} \geq 2\sqrt{(b+2) \cdot \frac{16}{b+2}}=8$ (当且仅当 $b+2=4$ 时取等号).15 分

所以 $V \leq 18(10-8)=36$ (当且仅当 $a=6, b=2$ 时取等号).16 分

故仓库容积 V 的最大值为 36 m^3 时, 此时 $a=6 \text{ m}, b=2 \text{ m}$17 分

19. 解:(1) $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 证明如下:1 分

$\forall x_1, x_2 \in (1,+\infty)$, 且 $1<x_1<x_2$, 有

$f(x_2)-f(x_1)=(a-\frac{2}{2^{x_2}-1})-(a-\frac{2}{2^{x_1}-1})$ 2 分

$$=\frac{2}{2^{x_1}-1}-\frac{2}{2^{x_2}-1}$$

$$=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}-1)} \cdot$$

.....3 分

因为 $1<x_1<x_2$, 所以 $2^{x_2}-2^{x_1}>0, 2^{x_1}-1>0, 2^{x_2}-1>0$4 分

故 $f(x_2)-f(x_1)>0$, 即 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.5 分

(2)因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

所以函数 $y=f(x)$ 图象的对称中心横坐标为 1.6 分

$$\begin{aligned} \text{因为 } f(1+x)+f(1-x) &= 2a - \left(\frac{2}{2^x-1} + \frac{2}{2^{-x}-1} \right) = 2a - 2 \left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{2^x}{1-2^x} \right) \\ &= 2a - 2 \cdot \frac{1-2^x}{2^x-1} = 2(a+1). \end{aligned} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以 $f(1+x)-(a+1) = -[f(1-x)-(a+1)]$, 故 $y=f(1+x)-(a+1)$ 是奇函数.9 分

所以 $y=f(x)$ 图象的对称中心为 $P(1, a+1)$10 分

(3) 题意为 $f(x) < a^2 \cdot 2^x$, 即 $a - \frac{2}{2^x-1} < a^2 \cdot 2^x (x < 0)$ 有解.11 分

令 $t=2^x (0 < t < 1)$, 则 $a - \frac{4}{t-2} < a^2 \cdot t$, 即 $a(t-2)-4 > a^2 t(t-2)$.

整理, 得 $a^2 t^2 - a(2a+1)t + (2a+4) < 0$12 分

设函数 $h(t) = a^2 t^2 - a(2a+1)t + (2a+4)$, 即 $h(t) < 0$ 在 $(0, 1)$ 内有解.

这里 $a \neq 0$, 否则 $h(t) = 4 > 0$ 不合题意; 此时抛物线 $y=h(t)$ 的开口向上.13 分

又因为 $h(t) < 0$ 有解, 所以 $\Delta = a^2(2a+1)^2 - 4a^2(2a+4) > 0$.

化简, 得 $(2a+3)(2a-5) > 0$, 解得 $a < -\frac{3}{2}$, 或 $a > \frac{5}{2}$14 分

① 当 $a < -\frac{3}{2}$ 时, 抛物线 $y=h(t)$ 的对称轴 $t_0 = \frac{a(2a+1)}{2a^2} = 1 + \frac{1}{2a} \in (\frac{2}{3}, 1)$.

所以 $h(t) < 0$ 在 $(0, 1)$ 内恒有解 (至少有 $h(t_0) < 0$).15 分

② 当 $a > \frac{5}{2}$ 时, 抛物线 $y=h(t)$ 的对称轴 $t_0 = \frac{a(2a+1)}{2a^2} = 1 + \frac{1}{2a} \in (1, \frac{6}{5})$.

要使 $h(t) < 0$ 在 $(0, 1)$ 内有解, 则 $h(1) = -a^2 + a + 4 < 0$.

解得 $a < \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, 或 $a > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. 又 $a > \frac{5}{2}$, 所以 $a > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$16 分

综上可知, 存在常数 a , 使 $y=f(x)$ 关于 $y=2^x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的 a^2 倍集不为空集,

其取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$17 分