成都七中高 2025 届高三下入学测试参考答案

一、单选题

1. D **2.** C **3.** C **4.** B **5.** A **6.** A **7.** C **8.** B

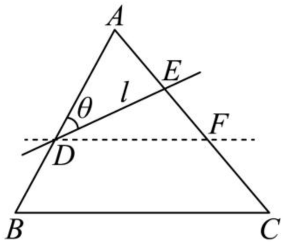
二、多选题

9. ABC **10.** ABD **11.** ACD

三、填空题

12. $y=\sqrt{3}x$ **13.** 112 **14.** $\dfrac{2n^2}{n+1}$

15.解：如下图所示，过点 D 作 $DF//BC$，



在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，取单位向量 $\vec{n}=\dfrac{\overrightarrow{DE}}{\left|\overrightarrow{DE}\right|}$，……………………………4 分

则 $\vec{n}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=0$，即 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}+\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}+\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，……………………..8 分

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos(\pi-\theta)=-c\cos\theta$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos(B-\theta)=a\cos(B-\theta)$，…..10 分

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos(A+\theta)=b\cos(A+\theta)$，

所以，$-c\cos\theta+a\cos(B-\theta)+b\cos(A+\theta)=0$，即 $a\cos(B-\theta)+b\cos(A+\theta)=c\cos\theta$ ..13 分

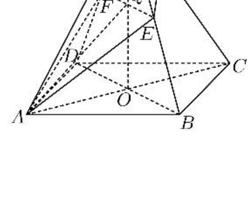
16.解：（1）连接 AC，BD，相交于点 O，

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 O 是正方形的中心，$BD\perp AC$.连接 PO，因为四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥，则 $PO\perp$底面 $ABCD$，即 $PO\perp BD$，可知 $BD\perp$平面 POC；

因为 E、F 分别为 PB、PD 的中点，所以 EF 是三角形 PBD 的中位线，$\therefore EF//BD$

则 $EF\perp$平面 POC,即可证 $EF\perp PC$ …………………………..4 分

（2）由（1）可知 $EF\parallel BD$，因为 $BD\subset$平面 $ABCD$，$EF\not\subset$平面 $ABCD$，所以 $EF\parallel$平面 $ABCD$，设平面 $AEGF$ 与平面 $ABCD$ 相交于直线 l，故 $EF//l//DB$，连接 QA，



则因为 $AE=AF$，所以 $AQ\perp EF$，又因为 $OA\perp BD$，

故 $\angle QAO$ 即为平面 $AEGF$ 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角，其中

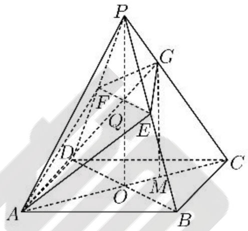
$OQ=\dfrac{1}{2}OP=1$，$AO=2$，所以 $\tan\angle OAQ=\dfrac{OQ}{AO}=\dfrac{1}{2}$，故

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

$\cos\angle OAQ=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即平面 $AEGF$ 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$….10 分

（3）延长 AQ，则由两平面相交的性质可得 AQ 一定过点 G，过点 G 作 $GM // PO$ 交 AC 于点 M，因为 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $GM\perp$ 底面 $ABCD$，

设 $GM=CM=x$，则 $AM=4-x$，由第二问知：$\tan\angle OAQ=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{GM}{AM}=\dfrac{1}{2}$，



即 $\dfrac{x}{4-x}=\dfrac{1}{2}$，解得：$x=\dfrac{4}{3}$，故 $\dfrac{CG}{PC}=\dfrac{GM}{OP}=\dfrac{\frac{4}{3}}{2}=\dfrac{2}{3}$，所以点 G 的位置为线段 PC 靠近 P 的三等分点.

（也可建立空间坐标系，算对酌情给分）…………………………..15 分

17. 解：（1）由 $f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$，

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，即函数 $y=f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 处的切线方程为 $y-1=\dfrac{\pi}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

化简可得切线方程为 $y=\dfrac{\pi}{2}x+1-\dfrac{\pi^2}{4}$　　　…………………………..4 分

（2）当 $x\in(n\pi,(n+1)\pi)$ 时，$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

①当 n 是偶数时，$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 上是严格增函数；

②当 n 是奇数时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 上是严格减函数；

且 $f(n\pi)=(-1)^{n-1}n\pi$，故 $f(n\pi)\cdot f((n+1)\pi)=-n(n+1)\pi^2<0$，

所以由零点存在定理可知，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 上有且仅有一个零点.

又 $644.5\pi<2025<645\pi$，可知从 $(\pi,2\pi),(2\pi,3\pi)\cdots(643\pi,644\pi)$ 各有一个零点；

又因为 $f\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$，故 $f(n\pi)\cdot f\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-n\pi<0$，

所以由零点存在性定理可知，函数 $y=f(x)$ 在 $\left(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上有且仅有一个零点 x_n，

即在区间 $(644\pi,644.5\pi)$ 上还有一个零点.

综上函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,2025)$ 上的零点个数为 644 个. …………………………..9 分

（3）由（2）可知函数 $f(x)$ 在 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 上有且仅有一个零点 x_n，

锦宏教育 Jinhong Education

且满足 $f\left(x_n\right)=\sin x_n - x_n\cos x_n = 0$，即 $\tan x_n = x_n$（几何意义：x_n是 $y=\tan x$ 与 $y=x$ 交点的横坐标）由上问可知 $x_n+\pi, x_{n+1}\in\left(\left(n+1\right)\pi,\left(n+1\right)\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x_{n+1}-\left(x_n+\pi\right)\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\tan\left(x_{n+1}-\left(x_n+\pi\right)\right)=\tan\left(x_{n+1}-x_n\right)=\frac{\tan x_{n+1}-\tan x_n}{1+\tan x_{n+1}\cdot\tan x_n}=\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_{n+1}\cdot x_n}$$

因为 $x_{n+1}-x_n>0$，得 $\tan\left(x_{n+1}-\left(x_n+\pi\right)\right)>0$ 所以 $x_{n+1}-\left(x_n+\pi\right)>0$，即 $\pi<x_{n+1}-x_n$；

（或者 $\tan x_{n+1}-\tan\left(x_n+\pi\right)=\tan x_{n+1}-\tan x_n=x_{n+1}-x_n>0$

$\Rightarrow \tan x_{n+1}>\tan\left(x_n+\pi\right)\Rightarrow x_{n+1}-x_n>\pi$）　　……………………………15 分

18.解：（1）设质点 n 次移动中向右移动的次数为 Y，显然每移动一次的概率为$\frac{1}{2}$，则

$Y\sim B(n,\dfrac{1}{2})$，$\xi_n=Y-(n-Y)=2Y-n$，所以

$P(\xi_4=-2)=P(Y=1)=C_4^1(\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{4}$ ……………………………4 分

（2）①设运动 2025 次中有 k 次向右运动，则 $k\sim B(2025,\dfrac{1}{3})$，$\xi_{2025}=2k-2025$，

$\therefore P(\xi_{2025}=2k-2025)=C_{2025}^k(\dfrac{1}{3})^k(\dfrac{2}{3})^{2025-k}$，

由 $\begin{cases} C_{2025}^k(\dfrac{1}{3})^k(\dfrac{2}{3})^{2025-k}\ge C_{2025}^{k-1}(\dfrac{1}{3})^{k-1}(\dfrac{2}{3})^{2026-k} \\ C_{2025}^k(\dfrac{1}{3})^k(\dfrac{2}{3})^{2025-k}\ge C_{2025}^{k+1}(\dfrac{1}{3})^{k+1}(\dfrac{2}{3})^{2024-k} \end{cases}$，解得 $674\dfrac{1}{3}\le k\le 675\dfrac{1}{3}$，

又 $k\in N$，所以 $k=675$，即 $k=675$ 时，$P(\xi_{2025}=2k-2025)$ 最大，此时 $\xi_{2025}=-675$，

即 $n=2025$ 时，质点最有可能运动到的位置对应的数为 -675……………………….12 分

②设运动 n 次中有 k 次向右运动，则 $\xi_n=2k-n$，$k\sim B(n,\dfrac{1}{3})$，

由 $D(k)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}n=\dfrac{2}{9}n$，$D(\xi_n)=D(2k-n)=4D(k)=\dfrac{8}{9}n$ ……………………17 分

19.解：(1)由抛物线的定义可知：$y_M+\dfrac{p}{2}=\dfrac{|AF|+|BF|}{2}\ge\dfrac{|AB|}{2}$，

即 $y_M\ge\dfrac{|AB|}{2}-\dfrac{p}{2}$，当且仅当 AB 过焦点时取等.

则 $\dfrac{19}{4}=\dfrac{10}{2}-\dfrac{p}{2}$，可解得 $p=\dfrac{1}{2}$，抛物线方程为 $y=x^2$.　　…………………………..6 分

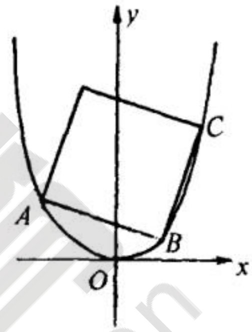
锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

(2)①设 $A\left(a,a^2\right)$，$B\left(0,0\right)$，$C\left(c,c^2\right)(ac\neq 0)$，则 $k_{AC}=\dfrac{a^2-c^2}{a-c}=a+c$

则直线 AC 的方程为 $y-a^2=(a+c)(x-a)$，化简可得 $y=(a+c)x-ac$

由 $BC\perp AB$,可知 $ac=-1$，即直线 AC 恒过定点 $E\left(0,1\right)$.

则点 D 在以 BE 为直径的圆上（原点除外），



综上，点 D 的轨迹方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(y\neq 0)$；……………………10 分

② 依题意可设 $A\left(a,a^2\right)$，易知直线 BA，CB 的斜率均存在且不为 0，

则设 BA,CB 的斜率分别为 k 和 $-\dfrac{1}{k}$，由对称性，不妨设 $|k|\leq 1$，

直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)+a^2$，则联立 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=k(x-a)+a^2 \end{cases}$ 得 $x^2-kx+ka-a^2=0$，

$\Delta=k^2-4\left(ka-a^2\right)=\left(k-2a\right)^2>0$，则 $k\neq 2a$

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|$，同理 $|BC|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$，

$\therefore |AB|+|BC|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$

$\geq\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right)\geq\sqrt{1+k^2}\left|k+\dfrac{1}{k}\right|=\sqrt{\dfrac{\left(1+k^2\right)^3}{k^2}}$

令 $k^2=m$，则 $m\in\left(0,1\right]$，设 $f(m)=\dfrac{(m+1)^3}{m}=m^2+3m+\dfrac{1}{m}+3$，

则 $f'(m)=2m+3-\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$，令 $f'(m)=0$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$，

当 $m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$f'(m)<0$，此时 $f(m)$ 单调递减，当 $m\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，$f'(m)>0$，此时 $f(m)$ 单调递增，则 $f(m)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$，$\therefore |AB|+|BC|\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

但 $\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\geq\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right)$，此处取等条件为 $k=1$，与最终取等时 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 不一致，故 $|AB|+|BC|>\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………………………17 分