

南充市高 2025 届高三适应性考试（三诊）

数学试卷参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	C	B	C	D	B

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
AC	ABD	ABD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 45 13. $x - y - 2 = 0$ 14. 1

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解（1）由 $a \cos C + c \cos A = 2b \cos A$ 可得：

$$\sin A \cos C + \sin C \cos A = 2 \sin B \cos A, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \sin(A + C) = \sin B = 2 \sin B \cos A,$$

$$\text{因为 } \sin B \neq 0, \text{ 所以 } 2 \cos A = 1, \text{ 即 } \cos A = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由正弦定理, } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径 } r = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$\text{要使外接圆的半径最小, 只需 } a \text{ 最小, } \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc = 16, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } b = c = 4 \text{ 时取等号, 此时 } a = 4, \text{ 则 } r_{\min} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 外接圆面积的最小值为 } \pi \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{16\pi}{3}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

16. 解 (1) 由题意可知曲线 C 的轨迹为椭圆的一部分, 令 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

由已知可得 $2a + 2c = 4 + 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$, 3 分

得 $a = 2, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$,

所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \neq \pm 2)$ 5 分

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4(x \neq \pm 2) \\ y = k(x-1) \end{cases}$, 消去 y 并整理得 $(4k^2 + 1)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 1}$,

所以 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 2) = \frac{-2k}{4k^2 + 1}$, 8 分

此时 AB 中点 $M(\frac{4k^2}{4k^2 + 1}, \frac{-k}{4k^2 + 1})$, 10 分

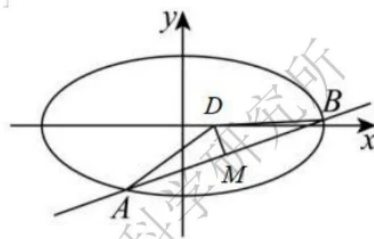
因为 $|DA| = |DB|$, 所以直线 DM 与直线 AB 垂直,

所以 $k_{DM} \cdot k = -1$,

即 $\frac{\frac{-k}{4k^2 + 1} - \frac{-k}{4k^2 + 1}}{\frac{4k^2}{4k^2 + 1} - \frac{1}{2}} \cdot k = -1$, 13 分

解得 $\frac{-k^2}{2k^2 - \frac{1}{2}} = -1$, 即 $k^2 = \frac{1}{2}$,

则 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 15 分

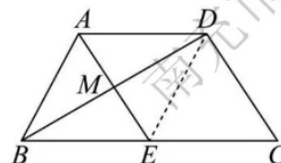


17. 解 (1) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, 连接 DE , $BE = \frac{1}{2}BC$,

又因为 $AD = \frac{1}{2}BC = 2$, 所以 $AD = BE$,

又因为 $AD \parallel BE$, 所以四边形 $ABED$ 是平行四边形,

因为 $AB = AD$, 所以四边形 $ABED$ 是菱形, 从而 $AE \perp BD$, 2 分



$\triangle BEA$ 沿着 AE 翻折成 $\triangle B_1AE$ 后, 有 $AE \perp B_1M, AE \perp DM$,

又 $B_1M \cap DM = M, B_1M, DM \subset$ 平面 B_1DM , 所以 $AE \perp$ 平面 B_1DM ,

由题意, 易知 $AD \parallel CE, AD = CE$, 所以四边形 $AECD$ 是平行四边形,

故 $AE \parallel CD$, 所以 $CD \perp$ 平面 B_1DM5分

(2) 以 M 为坐标原点, ME, MD, MB_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

因为 $AB = BE = AE$, 所以 $\triangle ABE$ 为等边三角形, 同理 $\triangle ADE$ 也为等边三角形,

则 $B_1(0, 0, \sqrt{3}), A(-1, 0, 0), D(0, \sqrt{3}, 0)$,7分

设平面 B_1AD 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = (x, y, z) \cdot (1, \sqrt{3}, 0) = x + \sqrt{3}y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1D} = (x, y, z) \cdot (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \sqrt{3}y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

令 $y = 1$ 得 $x = -\sqrt{3}, z = 1$,

故 $\vec{m} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$,9分

又平面 B_1MD 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

$$|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-\sqrt{3}, 1, 1) \cdot (1, 0, 0)|}{\sqrt{3+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

故平面 B_1MD 与平面 B_1AD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$11分

(3) 假设线段 B_1C 上存在点 P , 使得 $MP \parallel$ 平面 B_1AD ,

过点 P 作 $PQ \parallel CD$ 交 B_1D 于 Q , 连接 MP, AQ , 如图所示:

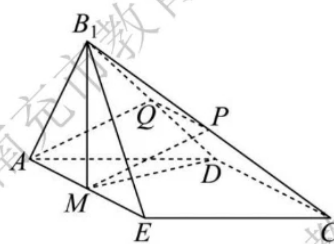
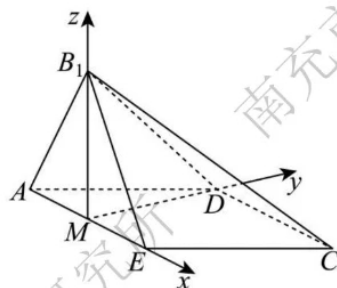
所以 $AM \parallel CD \parallel PQ$, 所以 A, M, P, Q 四点共面,

又因为 $MP \parallel$ 平面 B_1AD , 所以 $MP \parallel AQ$,

所以四边形 $AMPQ$ 为平行四边形,

所以 $PQ = AM = \frac{1}{2}CD$, 所以 P 是 B_1C 的中点,

故在线段 B_1C 上存在点 P , 使得 $MP \parallel$ 平面 B_1AD , 且 $\frac{B_1P}{B_1C} = \frac{1}{2}$15分



18. 解：(1) 小明从甲口袋有放回地摸出一个球，摸出白球的概率为 $\frac{4}{4+4} = \frac{1}{2}$ ，

从乙口袋有放回地摸出一个球，摸出白球的概率为 $\frac{2}{4+2} = \frac{1}{3}$ 。.....2 分

(I) 设“小明 4 次摸球中，至少摸出 1 个白球”为事件 A，则“小明 4 次摸球中，摸出的都是红球”为事件 $\bar{A}$ ，且 $P(\bar{A}) = (1 - \frac{1}{2})^2 \times (1 - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ ，

所以 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ 。.....5 分

(II) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4，

由 (i)，得 $P(X=0) = P(\bar{A}) = \frac{1}{9}$ ，

$$P(X=1) = C_2^1 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times C_2^1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}，$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^1 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times C_2^1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{13}{36}，$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times C_2^1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + C_2^1 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}，$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{36}。.....8 分$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

$$\text{则 } E(X) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{13}{36} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{3}。.....11 分$$

(2) 由 $m = 2n$ ，小明从甲口袋有放回地摸出一个球，摸出红球的概率为

$$\frac{m}{m+4} = \frac{2n}{2n+4} = \frac{n}{n+2}，\text{从乙口袋有放回地摸出一个球，摸出红球的概率为 } \frac{n}{n+2}，\text{可视为小}$$

明从甲口袋中有放回地摸出一个球，连续摸 4 次，相当于 4 次独立重复试验，每次摸出红球的概

$$\text{率为 } \frac{n}{n+2}，$$

$$\text{法一：设 } k = \frac{n}{n+2} (0 < k < 1)，\text{则 } P(k) = C_4^k k^k (1-k)^{4-k} = 4(k^3 - k^4)。.....13 分$$

$$\text{因为 } P'(k) = -16k^2 \left(k - \frac{3}{4}\right)，$$

所以当 $0 < k < \frac{3}{4}$ 时, $P'(k) > 0$; 当 $\frac{3}{4} < k < 1$ 时, $P'(k) < 0$,

所以 $P(k)$ 在区间 $(0, \frac{3}{4})$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{3}{4}, 1)$ 上单调递减,15 分

所以当 $k = \frac{3}{4}$ 时, $P(k)$ 最大,

此时 $k = \frac{n}{n+2} = \frac{3}{4}$, 解得 $n = 6$,

故当 $n = 6$, 即 $m = 2n = 12$ 时, P 最大.17 分

法二: $P = C_2^2 (\frac{n}{n+2})^2 \times C_2^1 (\frac{n}{n+2}) \times \frac{2}{n+2} + C_2^1 \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+2} \times C_2^1 (\frac{n}{n+2})^2 = \frac{8n^3}{(n+2)^4}$,13 分

设 $f(x) = \frac{8x^3}{(x+2)^4} (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{24x^2(x+2)^4 - 8x^3 \times 4(x+2)^3}{(x+2)^8} = \frac{8x^2(6-x)}{(x+2)^5}$,

所以当 $0 < x < 6$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 6$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 6)$ 上单调递增, 在区间 $(6, +\infty)$ 上单调递减,15 分

所以当 $x = 6$, 即 $m = 2n = 12$ 时, P 最大.17 分

19. 解 (1) 由题意得 $f'(x) = 6(2x+1)^2$, 因为 $x_0 = 1$, 所以 $f(1) = 3^3 = 27$, $f'(1) = 6 \times 3^2 = 54$,

所以过点 $(1, 27)$ 的切线方程为 $y - 27 = 54(x - 1)$, 令 $y = 0$, 得 $x_1 = \frac{1}{2}$;2 分

又因为 $f(\frac{1}{2}) = 2^3 = 8$, $f'(\frac{1}{2}) = 6 \times 2^2 = 24$,

所以过点 $(\frac{1}{2}, 8)$ 的切线方程为 $y - 8 = 24(x - \frac{1}{2})$, 令 $y = 0$, 得 $x_2 = \frac{1}{6}$,

综上得, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{6}$4 分

(2) 因为 $f(x_n) = (2x_n+1)^3$, $f'(x_n) = 6(2x_n+1)^2$,

则 $f(x) = (2x+1)^3$ 在点 $(x_n, f(x_n))$ 处的切线方程为 $y - (2x_n+1)^3 = 6(2x_n+1)^2(x - x_n)$,

令 $y = 0$, 得 $x = -\frac{(2x_n+1)^3}{6(2x_n+1)^2} + x_n = \frac{2}{3}x_n - \frac{1}{6}$,

即 $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n - \frac{1}{6}$,6 分

所以 $x_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}(x_n + \frac{1}{2})$,

由 (1) 可知道 $x_1 + \frac{1}{2} = 1$,

所以 $\left\{x_n + \frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $x_1 + \frac{1}{2} = 1$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列, 所以 $x_n + \frac{1}{2} = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

所以 $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}$8 分

所以 $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$

$$\begin{aligned} &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{2}\right] + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \frac{1}{2}\right] + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\right] \\ &= \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] - \frac{1}{2}n \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{1}{2}n \\ &= -3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}n + 3. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 10$$

(3) 把 $f(x) = (2x+1)^3$ 代入得 $g(x) = \frac{1}{3}x \ln \left[f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right] = x \ln x \quad (x > 0)$,

所以 $g'(x) = \ln x + 1$, 令 $g'(x) > 0$ 得: $x > \frac{1}{e}$; 令 $g'(x) < 0$ 得: $0 < x < \frac{1}{e}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增.11 分

①先证左边: 由 $g(x) = m$ 有两个不同实数根 α, β , ($\alpha < \beta$) 可知: $0 < \alpha < \frac{1}{e} < \beta < 1$,

令 $h(x) = \ln x - x + 1 (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) < h(1) = 0$, 即 $\ln x < x - 1$,12 分

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) = x \ln x < x^2 - x = t(x)$,

当 $-\frac{1}{4} < m < 0$ 时, 显然 $x^2 - x = m$ 有两个不同的实根, 记为 t_1, t_2 , 且 $t_1 < \frac{1}{2} < t_2$,

$t_1 + t_2 = 1, t_1 t_2 = -m$,

又 $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln 2 < -\frac{1}{4}$,

故 $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$,

所以 $\alpha + t_1 - 1 < 0$,

因为 $\alpha \ln \alpha - t_1^2 + t_1 = 0 < \alpha^2 - \alpha - t_1^2 + t_1 = (\alpha - t_1)(\alpha + t_1 - 1)$,

所以 $\alpha < t_1$,

同理可证: $\beta > t_2$,

所以 $\beta - \alpha > t_2 - t_1 = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2} = \sqrt{1 + 4m}$15 分

②再证右边: 因为 $g'(1) = 1$, $g(1) = 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线为: $y = x - 1$,

易证 $g(x) > x - 1$,

所以 $g(\beta) = m > \beta - 1$,

所以 $\beta < m + 1$, 又 $\alpha > 0$,

所以 $\beta - \alpha < m + 1$,

综上所述, $\sqrt{1 + 4m} < \beta - \alpha < m + 1$17 分