

四川省新高考 2022 级高三适应性考试

数 学

考试时间 120 分钟,满分 150 分

注意事项:

1. 答题前,考生务必在答题卡上将自己的姓名、班级、考场/座位号用 0.5 毫米黑色签字笔填写清楚,考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴码区”。

2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上,如需改动,用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案;非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答,超出答题区域答题的答案无效;在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

C. $\{-1, 0, 1, 2\}$

D. $\{0, 1, 2\}$

2. 已知 i 为虚数单位,复数 z 满足 $(z + 2i) \cdot i = -1 + i$, 则 $|z| =$

A. 2

B. $\sqrt{2}$

C. 1

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 下列四个函数中,以 π 为最小正周期,且在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增的是

A. $y = \sin 2x$

B. $y = \cos 2x$

C. $y = |\cos x|$

D. $y = |\sin x|$

4. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$, 则函数 $y = f(x+2) + 2$ 的图象

A. 关于点 $(-2, 2)$ 对称B. 关于点 $(2, -2)$ 对称C. 关于直线 $x = 2$ 对称D. 关于直线 $x = -2$ 对称

5. 已知向量 $a = (\cos \alpha, 1)$, $b = (\sin \alpha, \sqrt{3})$, 则“ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ”是“向量 a, b 共线”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

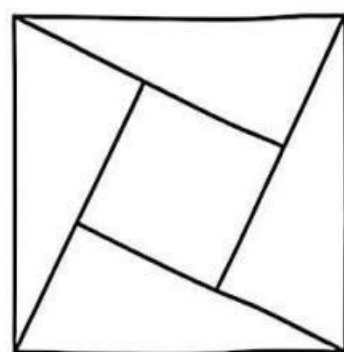
6. 赵爽是我国古代数学家,他为《周髀算经》一书作序时,介绍了“勾股圆方图”,亦称“赵爽弦图”(以弦为边长得到的正方形由 4 个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成). 如图的“赵爽弦图”中小正方形的面积为 49,大正方形的面积为 169,直角三角形中较大的锐角为 α , 则 $\sin 2\alpha =$

A. $\frac{7}{13}$

B. $\frac{49}{169}$

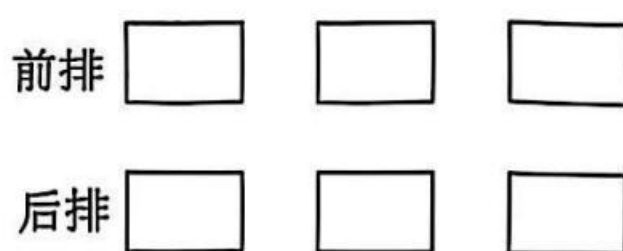
C. $\frac{60}{169}$

D. $\frac{120}{169}$



7. 甲、乙等 6 人参加某次会议,会议安排其前后两排入座,每排 3 人(如图所示),其中甲坐后排,乙与甲前后、左右均不相邻,则不同的坐法种数共有

- A. 144 种
B. 168 种
C. 192 种
D. 216 种



8. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , P 为抛物线 C 上任意一点, O 为坐标原点, M 为线段 FP 的中点,则直线 OM 斜率的最大值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{p}{2}$ D. p

二、选择题:本大题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,选对但不全的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 已知袋装食盐标准质量为 400 g,设甲、乙两品牌袋装食盐质量的误差分别为随机变量 X, Y ,且 $X \sim N(0, 2^2)$, $Y \sim N(0, 3^2)$,则

- A. $P(X \leq -2) + P(X \leq 2) = 1$
B. $P(0 < Y < 3) + P(Y \leq -3) > \frac{1}{2}$
C. $P(Y > 0) > P(X < 0)$
D. $P(|X| \leq 2) > P(|Y| \leq 2)$

10. 已知在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $a = 4$, $\sin B + \sin C = 2\sin A$,则

- A. $\triangle ABC$ 的周长为 12
B. 角 A 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$
C. $\triangle ABC$ 的面积最小值为 $2\sqrt{3}$
D. $\triangle ABC$ 的面积最大值为 $4\sqrt{3}$

11. 已知 $x = -1$ 是函数 $f(x) = (x^2 + a)e^{2x}$ 的极大值点,则

- A. 函数 $f(x)$ 的极小值为 0
B. 若 $-1 < x < 0$,则 $f(x^3) > f(x)$
C. 若 $0 < m < \frac{1}{e^2}$,则 $y = f(x) - m$ 有 3 个相异的零点
D. 若 $f(x_1) = f(x_2)$ (其中 $x_2 > x_1 > -1$),则 $x_1 + x_2 < 0$

三、填空题:本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, O 为坐标原点,过双曲线 C 的右焦点且与 x 轴垂直的直线与双曲线 C 的两条渐近线分别相交于点 M, N ,则 $\triangle MON$ 的面积为_____.

13. 若 $\exists x_0 \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{x_0-1} \leq m - x_0$, 则实数 m 的取值范围为 _____.

14. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $\sqrt{2}$, 其顶点都在球 O 的球面上, 点 M 在棱 CD 上, 且 $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, 则过点 M 的平面截球 O 所得截面的面积最小值为 _____.

四、解答题: 本大题共 5 小题, 共 77 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知在各项为正的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_2 + 6$ 是 a_1 与 a_3 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{n}{2}(a_{n+1} - a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

16. (15 分)

某工厂生产了两批次的某种产品, 现从两批次的产品中共抽取 500 件进行检测, 根据检测结果(“次品”或“合格品”)得到如下列联表:

生产批次	产品检测结果		合计
	次品	合格品	
第一批次	10	190	200
第二批次	40	260	300
合计	50	450	500

(1) 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的 χ^2 独立性检验, 能否认为产品检测结果与生产批次有关联?

(2) 用样本估计总体, 频率估计概率. 现等可能地从两批次中选一批次, 再从该批次中随机抽取 1 件产品.

(i) 求取出的产品是次品的概率;

(ii) 已知取出的产品是次品, 求它是从第一批次的产品中取出的概率.

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据:

α	0.15	0.10	0.05	0.010
χ_α	2.072	2.706	3.841	6.635

17. (15分)

动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(1, 0)$ 的距离和点 M 到定直线 $l: x = 4$ 的距离的比是常数 $\frac{1}{2}$, 记点 M 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $m: kx - y - k = 0$ 与曲线 C 交于 A, B 两点,

(i) 求 $|AB|$ 的取值范围;

(ii) 是否存在实数 k , 使得点 $N(\frac{1}{7}, 0)$ 在线段 AB 的中垂线上? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 说明理由.

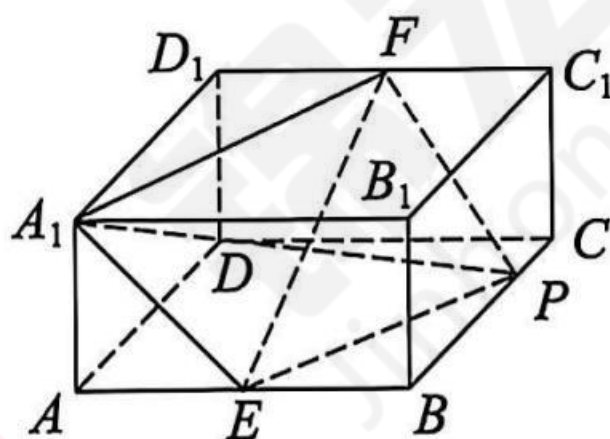
18. (17分)

如图, 在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $AB = 2AA_1 = 2$, E, F 分别为 AB, C_1D_1 的中点, P 是棱 BC 上的动点 (包含端点).

(1) 请说明当点 P 在何处时, A_1, E, F, P 四点在同一平面内;

(2) 当点 P 满足 $4\vec{BP} = 3\vec{BC}$ 时, 求三棱锥 $P - A_1EF$ 的体积 V_{P-A_1EF} ;

(3) 设二面角 $A_1 - EF - P$ 的大小为 θ , 求 $\sin\theta$ 的最大值.



19. (17分)

定义二元函数 $f(m, n) (m, n \in \mathbf{R})$, 且同时满足: ① $f(m, 1) = \sin m$; ② $f(m, n+1) = f(m, n) + \frac{\sin(2mn-m)}{2n+1}$ 两个条件.

(1) 求 $f(\frac{\pi}{2}, 2)$ 的值;

(2) 当 $0 < m < \pi$ 时, 比较 $f(m, n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 和 0 的大小;

(3) 若 $x = 0$ 为 $g(x) = \ln(1+x) - f(x, 2) + \frac{\sin x}{3} + ax^2$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

附: 参考公式:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$