

四川省新高考 2022 级高三适应性考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	D	A	A	D	C	B

二、选择题:本大题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,选对但不全的得部分分,有选错的得 0 分。

9	10	11
AD	ABD	ACD

三、填空题:本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. $4\sqrt{3}$

13. $[3, +\infty)$

14. $\frac{3\pi}{8}$

四、解答题:本大题共 5 小题,共 77 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性、综合性、创新性问题,主要考查等差中项、等比数列通项公式,差比数列求和(错位相减)等基础知识;考查运算求解能力,推理论证能力,方程思想,化归与转化等数学思想;考查数学运算、逻辑推理、数学抽象等核心素养。

【解析】

(1) 设各项为正的等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$),

由 $a_1 = 3$, 所以 $a_2 = 3q$, $a_3 = 3q^2$, 2 分

因为 $a_2 + 6$ 是 a_1 与 a_3 的等差中项,

所以 $3 + 3q^2 = 2(3q + 6)$, 化简得 $q^2 - 2q - 3 = 0$,

解得 $q = 3$, $q = -1$ (舍去),

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n$; 5 分

(2) 由(1)可得, $b_n = \frac{n}{2} (a_{n+1} - a_n) = \frac{n}{2} (3^{n+1} - 3^n) = n \cdot 3^n$, 6 分

所以 $S_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n$,

$3S_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \cdots + n \cdot 3^{n+1}$, 8 分

两式相减得 $-2S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1}$

$$= \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - n\right) \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2}, \text{ 12 分}$$

$$\text{所以 } S_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{4} \quad (n \in \mathbf{N}^*). \text{ 13 分}$$

16. 【命题意图】本小题设置生活实践情境,设计基础性、应用性问题,主要考查概率、列联表与独立性检验等基础知识;考查化归与转化、概率统计等数学思想;考查数学抽象、数学运算、数学建模等核心素养。

【解析】

(1) 提出零假设 H_0 : 产品检测结果与生产批次没有关联,

$$\text{由 } \chi^2 = \frac{500 \times (10 \times 260 - 40 \times 190)^2}{50 \times 450 \times 200 \times 300} \approx 9.26 > 6.635, \text{ 4 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的 χ^2 独立性检验,推断 H_0 不成立,

即产品检测结果与生产批次有关联,此推断犯错误的概率不大于 0.01; 6 分

(2) 设事件 B = “取出的产品是次品”，事件 A = “被选出的是第一批次”，

(i) 依题意, $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, 7 分

$P(B|A) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$, 9 分

由全概率公式, 得:

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{11}{120}$; 12 分

(ii) 取出的是次品, 则它是从第一批次的产品中取出的概率为:

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{20}}{\frac{11}{120}} = \frac{3}{11}$ 15 分

17. 【命题意图】本小题设置数学学习情境, 设计基础性、探究性问题, 主要考查椭圆的定义, 标准方程, 直线与椭圆的位置关系, 弦的中点, 中垂线的性质, 直线的斜率等基础知识; 考查数形结合、化归与转化、函数与方程等数学思想; 考查数学抽象、逻辑推理及数学运算等核心素养.

【解析】

(1) 设点 M 到直线 $l: x = 4$ 的距离为 d ,

根据题意, 动点 M 的轨迹就是集合 $P = \{M | \frac{|MF|}{d} = \frac{1}{2}\}$,

由此得 $\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{|4-x|} = \frac{1}{2}$, 2 分

将上式两边平方, 并化简, 得 $3x^2 + 4y^2 = 12$,

即曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 4 分

(2) 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ kx - y - k = 0 \end{cases}$, 消去 y 得 $(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$,

$\Delta = 64k^4 - 4(4k^2 + 3)(4k^2 - 12) = 144k^2 + 144 > 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3}$,

所以 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k = \frac{-6k}{4k^2 + 3}$, 7 分

(i) 易知 $|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{(1+k^2)[(\frac{8k^2}{4k^2+3})^2 - 4 \times \frac{4k^2-12}{4k^2+3}]}$,

即 $|AB| = \frac{12(k^2+1)}{4k^2+3} = 3(1 + \frac{1}{4k^2+3})$,

显然, $3 < 3(1 + \frac{1}{4k^2+3}) \leq 4$,

所以, $|AB|$ 的取值范围为 $(3, 4]$; 10 分

另解:

设 AB 的中点为 P ,

点 P 到直线 l 的距离为 d_1 ,

点 A 到直线 l 的距离为 d_A ,

点 B 到直线 l 的距离为 d_B ,

则 $d_A + d_B = 2d_1$,

由已知, 点 F 在直线 $kx - y - k = 0$ 上,

所以 $|AB| = |AF| + |BF| = \frac{1}{2}d_A + \frac{1}{2}d_B = d_1$,

由于直线 $kx - y - k = 0$ 是过点 $(1, 0)$ 的动直线, 但不能和 x 轴垂直,

根据椭圆的几何性质可知,

d_1 大于点 F 到直线 l 的距离 (直线 $kx - y - k = 0$ 不能与 x 轴垂直),

d_1 的最大值等于长轴长, 故 $4 - 1 < d_1 \leq 4$,

所以 $|AB|$ 的取值范围为 $(3, 4]$; 10 分

说明: 若用二级结论表示焦半径, 然后再讨论范围, 可以不扣分. 若直接给出范围, 根据解答的属性, 适当扣分.

(ii) 由上可知, AB 的中点坐标为 $P(\frac{4k^2}{4k^2+3}, \frac{-3k}{4k^2+3})$,

所以 PN 的斜率 $k_{PN} = \frac{\frac{-3k}{4k^2+3}}{\frac{4k^2}{4k^2+3} - \frac{1}{7}} = \frac{-7k}{8k^2-1}$, 13 分

由 $\frac{-7k}{8k^2-1} \cdot k = -1$,

解得 $k = \pm 1$,

所以存在 $k = \pm 1$, 使得点 $N(\frac{1}{7}, 0)$ 在线段 AB 的中垂线上. 15 分

18. 【命题意图】本小题设置数学学习情境、探索创新情境, 设计基础性、综合性、探究性问题, 主要考查空间线线、线面位置关系, 几何体的体积、空间角等基础知识; 考查数形结合、化归与转化等数学思想; 考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养.

【解析】

【方法一】

(1) 如图, 取 CD 的中点 M , 连接 AM , MF ,

由已知, $AA_1 \perp MF$,

所以, $A_1F \perp AM$,

易知, 当点 P 位于点 C 的位置时, $EC(P) \parallel AM$,

此时 A_1, E, F, P 四点在同一平面内,

显然, 平面 $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$,

若 A_1, E, F, P 四点在同一平面内,

则 $A_1F \parallel EP$,

当点 P 不在点 C 的位置时,

EP 与 AM 不平行, 从而与 A_1F 不平行,

因此 A_1, E, F, P 四点不在同一平面内,

所以, 当且仅当点 P 位于点 C 的位置时, A_1, E, F, P 四点在同一平面内; 5 分

(2) 取 AD 的中点 N , A_1D_1 的中点 N_1 , 连接 NN_1, BN, B_1N_1 ,

由已知 $CE \perp BB_1$,

易证 $CE \perp BN$, 点 B_1, B, N, N_1 在同一平面内,

则 $CE \perp$ 平面 B_1BNN_1 ,

所以平面 $B_1BNN_1 \perp$ 平面 A_1ECF ,

记 $CE \cap BN = Q$, $A_1F \cap B_1N_1 = Q_1$,

则平面 $B_1BNN_1 \cap$ 平面 $A_1ECF = QQ_1$,

在平面 B_1BNN_1 中, 过点 B 作直线 QQ_1 的垂线, 设垂足为点 H ,

则 BH 为点 B 到平面 A_1EF 的距离,

在平面 B_1BNN_1 中, 延长 B_1B 与 Q_1Q 交于点 T ,

可求得 $BQ = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $BT = 1$,

在 $\triangle BQT$ 中, 由面积相等, 有 $BQ \cdot BT = BH \cdot QT = BH \cdot \sqrt{BQ^2 + BT^2}$, 可得 $BH = \frac{2}{3}$,

又因为 $4\vec{BP} = 3\vec{BC}$, 则 P 为线段 BC 上靠近点 C 的四等分点,

所以点 P 到平面 A_1EF 的距离为 $h = \frac{1}{4}BH = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$,

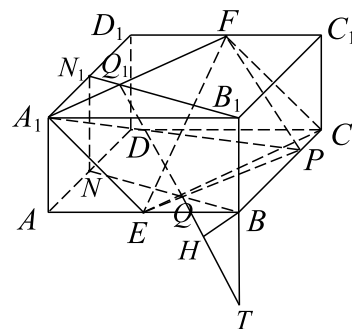
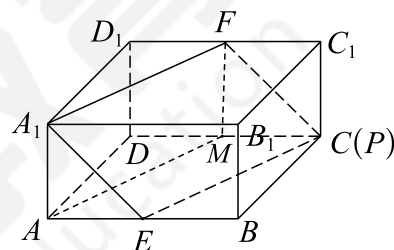
在 $\triangle A_1EF$ 中, $A_1E = \sqrt{2}$, $A_1F = EF = \sqrt{5}$, 则 $S_{\triangle A_1EF} = \frac{3}{2}$,

所以, $V_{P-A_1EF} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1EF} \cdot h = \frac{1}{12}$; 10 分

另解:

由(1)的结论知, 四边形 A_1ECF 为平行四边形,

所以 $V_{P-A_1EF} = V_{P-CEF} = V_{F-EPC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}PC \cdot BE \cdot AA_1 = \frac{1}{12}$; 10 分



(3)由(1)可知, A_1, E, F, C 四点在同一平面内,

则二面角 A_1-EF-P 的平面角 θ 与二面角 $C-EF-P$ 的平面角 α 互补,

所以 $\sin\theta = \sin\alpha$,

设点 P 到平面 CEF 的距离为 h , 点 P 到直线 EF 的距离为 l ,

则 $\sin\theta = \sin\alpha = \frac{h}{l}$,

在矩形 ABC_1D_1 中, $BE \perp BC_1$, 又因为 $EF \parallel BC_1$,

则 $BE \perp EF$, 又因为 $BE \perp BC$,

所以, BE 是异面直线 EF 与 BC 的公垂线,

故当点 P 运动至点 B 时, 点 P 到直线 EF 的距离 l 最小, 且 $l_{\min} = BE = 1$,

此时点 P 到平面 CEF 的距离 h 最大,

即 $h_{\max}$ 等于点 B 到平面 CEF 的距离 h' ,

所以, $\sin\theta$ 的最大值为 $\frac{h'}{l_{\min}} = h'$, 14 分

在 $\triangle CEF$ 中, $EF = \sqrt{5}$, $EC = \sqrt{5}$, $CF = \sqrt{2}$,

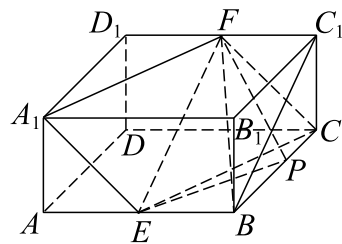
CF 边上的高为 $\sqrt{EC^2 - (\frac{CF}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

由 $V_{B-ECF} = V_{F-BCE}$, 得 $\frac{1}{3} S_{\triangle CEF} \cdot h' = \frac{1}{3} S_{\triangle BCE} \cdot BB'$,

即 $S_{\triangle CEF} \cdot h' = S_{\triangle BCE} \cdot BB'$,

所以, $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} h' = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 1$, 解得 $h' = \frac{2}{3}$,

所以, $\sin\theta$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$; 17 分



【方法二】

(1)根据已知, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

设 $CP = t$ ($0 \leq t \leq 2$),

又因为 $AB = 2AA_1 = 2$,

则 $A_1(2, 0, 1), E(2, 1, 0), F(0, 1, 1), P(t, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{A_1E} = (0, 1, -1), \overrightarrow{A_1F} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{A_1P} = (t-2, 2, -1)$,

显然, $\overrightarrow{A_1E}$ 与 $\overrightarrow{A_1F}$ 不共线, 令 $\overrightarrow{A_1P} = m\overrightarrow{A_1E} + n\overrightarrow{A_1F}$,

由上可得,

$(t-2, 2, -1) = m(0, 1, -1) + n(-2, 1, 0) = (-2n, m+n, -m)$,

于是有 $\begin{cases} t-2 = -2n, \\ 2 = m+n, \\ -1 = -m, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = 1, \\ n = 1, \\ t = 0, \end{cases}$

此时, $\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{A_1F}$,

所以, 当且仅当点 P 在点 C 的位置时, A_1, E, F, P 四点在同一平面内; 5 分

(2)由(1), $\overrightarrow{A_1E} = (0, 1, -1), \overrightarrow{A_1F} = (-2, 1, 0)$,

设平面 A_1EF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1E} = y_1 - z_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1F} = -2x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$

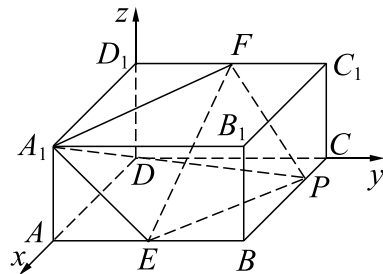
不妨设 $x_1 = 1$, 可得平面 A_1EF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$, 7 分

由已知, 当 $4\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{BC}$ 时, 可得 $P(\frac{1}{2}, 2, 0)$, 则 $\overrightarrow{PE} = (\frac{3}{2}, -1, 0)$,

所以点 P 到平面 A_1EF 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{PE} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\frac{3}{2} - 2|}{3} = \frac{1}{6}$,

在 $\triangle A_1EF$ 中, $A_1E = \sqrt{2}, A_1F = EF = \sqrt{5}$,

所以, $S_{\triangle A_1EF} = \frac{3}{2}, V_{P-A_1EF} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1EF} \cdot d = \frac{1}{12}$; 10 分



(3) 设 $P(t, 2, 0) (0 \leq t \leq 2)$, 则 $\vec{PF} = (-t, -1, 1)$, $\vec{EF} = (-2, 0, 1)$,

设平面 PEF 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{PF} = -tx_2 - y_2 + z_2 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{EF} = -2x_2 + z_2 = 0, \end{cases}$

不妨设 $x_2 = 1$, 可得平面 PEF 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 2-t, 2)$,

由(2)可知平面 A_1EF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$,

则 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{9-2t}{3\sqrt{1+(2-t)^2+4}} = \frac{9-2t}{3\sqrt{t^2-4t+9}}$, 14 分

令 $9-2t=k$, 则 $5 \leq k \leq 9$, $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{5}$,

所以 $\cos \theta = \frac{9-2t}{3\sqrt{t^2-4t+9}} = \frac{2k}{3\sqrt{k^2-10k+45}} = \frac{2}{3\sqrt{1-\frac{10}{k}+\frac{45}{k^2}}} = \frac{2}{3\sqrt{45(\frac{1}{k}-\frac{1}{9})^2+\frac{4}{9}}}$,

所以, 当且仅当 $\frac{1}{k} = \frac{1}{5}$, 即 $t=2$ 时, $\cos \theta$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{5}}{3}$,

此时, $\sin \theta$ 取得最大值 $\frac{2}{3}$ 17 分

19. 【命题意图】本小题设置数学学习、探索创新情境, 设计基础性、综合性、应用性、创新性问题, 主要考查函数图象和性质、导数的应用、三角函数等基础知识; 考查函数与方程、数形结合思想、化归与转化等数学思想; 考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养。

【解析】

(1) 由题意知, $m = \frac{\pi}{2}$, $n = 1$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) &= f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{3} \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) + \frac{1}{3} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3}; \end{aligned} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 由已知 $f(m, n+1) = f(m, n) + \frac{\sin(2mn-m)}{2n+1}$,

当 $n \geq 2$ 时, $f(m, n) - f(m, n-1) = \frac{\sin[(2n-3)m]}{2n-1}$, 4 分

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(m, n) - f(m, n-1) + f(m, n-1) - f(m, n-2) + \dots + f(m, 4) - f(m, 3) + f(m, 3) \\ &\quad - f(m, 2) + f(m, 2) - f(m, 1) + f(m, 1) \\ &= \frac{\sin m}{1} + \frac{\sin m}{3} + \frac{\sin 3m}{5} + \dots + \frac{\sin[(2n-3)m]}{2n-1}, \end{aligned} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (2\sin m)f(m, n) &= \frac{8\sin^2 m}{3} + \frac{2\sin m \sin 3m}{5} + \dots + \frac{2\sin m \sin[(2n-3)m]}{2n-1} \\ &= \frac{4(1-\cos 2m)}{3} + \frac{\cos 2m - \cos 4m}{5} + \dots + \frac{\cos[(2n-4)m] - \cos[(2n-2)m]}{2n-1} \\ &= \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right)\cos 2m - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\cos 4m - \dots \\ &\quad - \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos[(2n-4)m] - \frac{\cos[(2n-2)m]}{2n-1} \\ &\geq \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n-1} \\ &= 0, \end{aligned} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

当且仅当 $\cos 2km = 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 上式取得等号, 但不可能成立,

当 $n=1$ 时, $f(m, n) = f(m, 1) = \sin m > 0$, 不等式也成立,

所以当 $0 < m < \pi$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(m, n) > 0$; 10 分

(3) 因为 $f(x, 2) = f(x, 1) + \frac{\sin x}{3} = \sin x + \frac{\sin x}{3}$, 11 分

所以 $g(x) = \ln(1+x) - \sin x + ax^2 (x > -1)$, 注意到 $g(0) = 0$,

$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \cos x + 2ax (x > -1)$, 注意到 $g'(0) = 0$, 12 分

令 $h(x) = \frac{1}{1+x} - \cos x + 2ax (x > -1)$,

则 $h'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \sin x + 2a (x > -1)$, 注意到 $h'(0) = 2a - 1$,

令 $u(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \sin x + 2a (x > -1)$,

则 $u'(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \cos x (x > -1)$,

可知当 $x \in (-1, \frac{\pi}{2})$ 时, $u'(x) > 0$,

则当 $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $u'(x) > 0$, $u(x)$ 为增函数, 即 $h'(x)$ 为增函数,

若 $h'(0) = 2a - 1 \geq 0$, 即当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时,

存在 $0 < x_0 < \frac{\pi}{6}$, 使得当 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数, 即 $g'(x)$ 为增函数,

所以在区间 $(0, x_0)$ 上 $g'(x) > g'(0) = 0$, $g(x)$ 为增函数,

所以 $x = 0$ 不是 $g(x)$ 的极大值点, 不符合题意, 舍去, 15 分

若 $h'(0) = 2a - 1 < 0$, 即当 $a < \frac{1}{2}$ 时,

存在 $x_1 \in (0, \frac{\pi}{6})$, 使得当 $-\frac{\pi}{6} < x < x_1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数, 即 $g'(x)$ 为减函数,

所以, 在区间 $(0, x_1)$ 上, $g'(x) < g'(0) = 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减,

在区间 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 上, $g'(x) > g'(0) = 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增,

所以, $x = 0$ 是 $g(x)$ 的极大值点, 符合题意,

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 17 分

解析:

1. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性问题,主要考查一元二次不等式的解法,集合的交集等基础知识;考查运算求解能力,数学运算等核心素养。

【答案】C

【解析】由 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - x - 6 < 0\} = \{x | -2 < x < 3\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

2. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性问题,主要考查复数的除法和加减法运算,复数的模等基础知识;考查运算求解能力、数形结合思想,数学运算等核心素养。

【答案】B

【解析】由 $(z + 2i) \cdot i = -1 + i = i^2 + i$, 有 $z + 2i = i + 1$, 所以 $z = 1 - i$, 故 $|z| = \sqrt{2}$.

3. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性、应用性问题,主要考查正弦函数和余弦函数图象、周期与单调性等基础知识;考查运算求解能力、数形结合思想、应用意识。

【答案】D

【解析】显然四个函数的最小正周期均为 π , 由 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 得 $2x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 此时 $y = \sin 2x$, $y = \cos 2x$ 均单调递减, 选项 A, B 不正确; 当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, $y = |\cos x| = \cos x$ 单调递减, $y = |\sin x| = \sin x$ 单调递增, 所以选项 C 不正确, 选项 D 正确.

4. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性问题,主要考查函数的基本性质、图象变换等基础知识;考查数学抽象、逻辑推理、直观想象等核心素养。

【答案】A

【解析】易得 $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 函数 $y = f(x + 2) + 2$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象先向左平移 2 个单位, 再向上平移 2 个单位得到, 所以函数 $y = f(x + 2) + 2$ 的图象关于点 $(-2, 2)$ 对称.

5. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性、应用性问题,主要考查两个向量共线,平面向量的运算,充要条件等基础知识;考查运算求解能力,推理论证能力,数学运算和逻辑推理等核心素养。

【答案】A

【解析】当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 向量 $a = (\frac{1}{2}, 1)$, $b = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$, 显然向量 a, b 共线成立; 由向量 $a = (\cos \alpha, 1)$, $b = (\sin \alpha, \sqrt{3})$ 共线有 $\sin \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha$, 此时 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以“ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ”是“向量 a, b 共线”的充分不必要条件.

6. 【命题意图】本小题设置探究情境,设计创新性问题,主要考查三角函数定义,同角三角函数关系,二倍角公式等基础知识;考查推理论证能力,运算求解能力,数学运算,应用意识等素养。

【答案】D

【解析】由题意,大、小正方形的边长分别为 13, 7, 于是有 $13 \sin \alpha - 13 \cos \alpha = 7$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 即有 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{13}$, 两边平方得 $1 - \sin 2\alpha = \frac{49}{169}$, 所以 $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$.

7. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性、应用性问题,主要考查计数原理的应用,排列数公式等基础知识;考查数学抽象、数学运算等核心素养。

前排

【答案】C

【解析】如图所示,甲坐位置①,乙有3种选择,其他人不同坐法有 A_4^4 种,后排 ① ② ③ 种,共有 $3A_4^4 = 72$ 种不同坐法;甲坐位置②,乙有2种选择,其他人不同坐法有 A_4^4 种,共有 $2A_4^4 = 48$ 种不同坐法;甲坐位置③,乙有3种选择,其他人不同坐法有 A_4^4 种,共有 $3A_4^4 = 72$ 种不同坐法,所以不同坐法种数共有 $72 + 48 + 72 = 192$ 种。

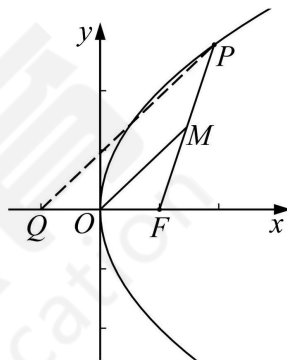
8. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性、综合性问题,主要考查抛物线定义、标准方程的应用等基础知识;考查数学抽象、数学运算等核心素养。

【答案】B

【解析】由已知, $F(\frac{p}{2}, 0)$, 设 $P(\frac{t^2}{2p}, t)$ (因为需要确定最大值,不妨设 $t > 0$), 则

$M(\frac{p^2+t^2}{4p}, \frac{t}{2})$, 于是直线 OM 的斜率满足:

$$k_{OM} = \frac{\frac{t}{2}}{\frac{p^2+t^2}{4p}} = \frac{2pt}{p^2+t^2} = \frac{2p}{\frac{p^2}{t}+t} \leq 1 (t > 0), \text{当且仅当 } \frac{p^2}{t} = t \text{ 即 } t = p \text{ 时取等.}$$



另解:可取点 $Q(-\frac{p}{2}, 0)$, 连接 PQ , 则 $PQ \parallel OM$, 直线 OM 的斜率 $k_{OM} = k_{PQ}$. 由图形直观可得, 直线 PQ 与抛物线相切时(点 P 在第一象限), 其斜率最大。

9. 【命题意图】本小题设置生活实践情境,设计基础性、应用性问题,主要考查正态分布等基础知识;考查化归与转化、统计与概率等数学思想;考查数学抽象、数据处理、数学建模等核心素养。

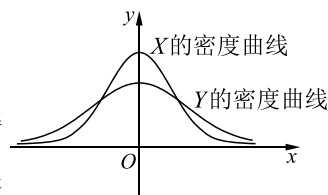
【答案】AD

【解析】作出随机变量 X, Y 的正态分布密度曲线草图, 根据对称性,

$P(X \leq -2) = 1 - P(X \leq 2)$, 选项 A 正确; 对于选项 B,

$P(0 < Y < 3) + P(Y \leq -3) = P(0 < Y < 3) + P(Y \geq 3) = P(Y > 0) = \frac{1}{2}$, 选

项 B 错误; 对于选项 C, $P(Y > 0) = P(X < 0) = \frac{1}{2}$, 选项 C 错误; 对于正态



分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 给定 $k \in \mathbf{N}^*$, $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$ 是一个只与 k 有关的定值, 则 $P(-2 \leq X \leq 2) = P(-3 \leq Y \leq 3) > P(-2 \leq Y \leq 2)$, 选项 D 正确。

10. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性、应用性问题,主要考查正弦定理,余弦定理,三角形面积等基础知识;考查推理论证能力,运算求解能力;考查逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养。

【答案】ABD

【解析】根据正弦定理得 $b + c = 2a = 8$, $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 12$, 选项 A 正确; 因为 $bc \leq (\frac{b+c}{2})^2 = 16$,

由余弦定理有 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} - 1 = \frac{24}{bc} - 1 \geq \frac{1}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, $\cos A \geq \frac{1}{2}$, 所以

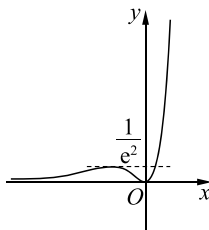
$A \in (0, \frac{\pi}{3}]$, 选项 B 正确; 当角 A 接近 0 时, $\triangle ABC$ 的面积也接近 0, 所以选项 C 错误; 由 $\sin A$ 在 $A = \frac{\pi}{3}$

时取得最大值, 故 $S_{\triangle ABC}$ 在 $b = c = 4$, $A = \frac{\pi}{3}$ 时取得最大值 $4\sqrt{3}$, 选项 D 正确。

11. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计综合性、创新性问题,主要考查函数基本性质、函数零点、导数等基础知识;考查化归与转化、函数与方程、数形结合等数学思想;考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养以及创新能力。

【答案】ACD

【解析】由题意, $f'(x) = 2(x^2 + x + a)e^{2x}$, 因为 $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 所以 $f'(-1) = 0$, 解得 $a = 0$, 于是 $f(x) = x^2e^{2x}$, $f'(x) = 2x(x+1)e^{2x}$, 可知当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 的极大值点为 -1 , 极小值点为 0 , 选项 A 正确; 由于当 $-1 < x < 0$ 时, $x - x^3 = x(1 - x^2) < 0$, 则 $-1 < x < x^3 < 0$, 又因为 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x^3) < f(x)$, 选项 B 错误; 由于 $f(x) \geq 0$, 且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$,



当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $f(x)$ 的图象如图所示, 当 $0 < m < \frac{1}{e^2}$ 时, $y = f(t) - m$ 有 3 个相异零点, 选项 C 正确; 对于选项 D, 可知 $-1 < x_1 < 0 < x_2$, 要证 $x_1 + x_2 < 0$, 只需证明 $x_2 < -x_1$, 由于 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 需证明 $f(x_2) < f(-x_1)$, 即当 $-1 < x_1 < 0$ 时, 证明 $f(x_1) < f(-x_1)$. 构造函数 $g(x) = f(x) - f(-x)$ (其中 $-1 < x < 0$), 则 $g'(x) = f'(x) + f'(-x) = (2x^2 + 2x)e^{2x} + (2x^2 - 2x)e^{-2x} = 2x(e^{2x} - e^{-2x}) + 2x^2(e^{2x} + e^{-2x})$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 所以 $g(x) = f(x) - f(-x) < g(0) = 0$, 即当 $-1 < x_1 < 0$ 时, $f(x_1) < f(-x_1)$, 所以 $f(x_2) < f(-x_1)$, 所以 $x_1 + x_2 < 0$, 选项 D 正确.

12. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性问题,主要考查双曲线的标准方程和几何性质,考查化归与转化、数形结合等数学思想;考查直观想象、数学运算等核心素养。

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】由题知 $|OF| = 2$. 由已知, 一条渐近线的方程为 $y = \sqrt{3}x$, 其倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $|FM| = 2\sqrt{3}$, $\triangle MON$ 的面积为 $4\sqrt{3}$.

13. 【命题意图】本小题设置数学学习情境,设计基础性问题,主要考查存在量词的理解、基本不等式的应用等基础知识,考查化归与转化、函数与方程等数学思想,考查逻辑推理、数学运算等核心素养。

【答案】 $[3, +\infty)$

【解析】由已知 $\frac{1}{x_0 - 1} \leq m - x_0$, 得 $m \geq x_0 + \frac{1}{x_0 - 1}$. 因为 $\exists x_0 \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{x_0 - 1} \leq m - x_0$, 故只需 $m \geq (x_0 + \frac{1}{x_0 - 1})_{\min}$. 令 $f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$, 则 $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 1} + 1 \geq 2\sqrt{(x - 1) \cdot \frac{1}{x - 1}} + 1 = 3$, 当且仅当 $x - 1 = \frac{1}{x - 1}$, 即 $x = 2$ 时取等号, 所以 $m \geq 3$.

14. 【命题意图】本小题设置数学学习情境、探索创新情境,设计综合性问题,主要考查正四面体、球的相关基础知识,考查化归与转化等数学思想,考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养。

【答案】 $\frac{3\pi}{8}$

【解析】如图, 棱长为 1 的正方体的顶点也都在球面 O 上, 所以球 O 的半径为 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 取 CD 的中点 N , 连接 ON , 则 $ON = \frac{1}{2}$. 由已知可得 $DM = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $DN = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $MN = DN - DM = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 因为过点 M 的平面截球 O 所得截面为圆, 易知过点 M 且垂直于 OM 的截面为面积最小的截面. 设该截面圆半径为 r , 则 $r = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - (ON^2 + MN^2)} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = \sqrt{\frac{3}{8}}$, 故所得截面的圆面积最小值为 $\frac{3\pi}{8}$.

