

2025 届高三数学试题

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{5+i}{1+i}$, 则 $|z| =$
 - A. $2\sqrt{2}$
 - B. $\sqrt{13}$
 - C. 8
 - D. 13
2. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $A(2, -4)$ 是抛物线 C 上一点, 则 $|AF| =$
 - A. 10
 - B. 8
 - C. 6
 - D. 4
3. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x - 5x + a$, 则 $f(a) =$
 - A. -6
 - B. -4
 - C. 4
 - D. 6
4. 已知 $p: \forall x \in (0, \pi), \sin x < 1; q: \exists x \in \mathbf{R}, x + |x| \leq 0$. 下列结论正确的是
 - A. p 是真命题, q 是真命题
 - B. p 是真命题, $\neg q$ 是真命题
 - C. $\neg p$ 是真命题, q 是真命题
 - D. $\neg p$ 是真命题, $\neg q$ 是真命题
5. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ 上恰有两个点到直线 $l: x + y + m = 0 (m > 0)$ 的距离为 2, 则 m 的取值范围是
 - A. $(3\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$
 - B. $(3\sqrt{2} + 1, 7\sqrt{2} + 1)$
 - C. $(2\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$
 - D. $(2\sqrt{2} + 1, 7\sqrt{2} + 1)$
6. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega} (\omega > 0)$, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调, 则 ω 的取值范围为
 - A. $[\frac{1}{2}, +\infty)$
 - B. $(0, \frac{1}{2}]$
 - C. $[1, +\infty)$
 - D. $(0, 1]$
7. 由阿基米德的著作《关于圆锥体和球体》可知, 椭圆的面积等于圆周率 π 与椭圆的长半轴长和短半轴长的乘积. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{5\sqrt{2}}{8}$, F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点, C 上一点 P 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{7}{2}$, 则 C 的面积为
 - A. $2\sqrt{14}\pi$
 - B. $2\sqrt{7}\pi$
 - C. $\sqrt{14}\pi$
 - D. $\sqrt{7}\pi$

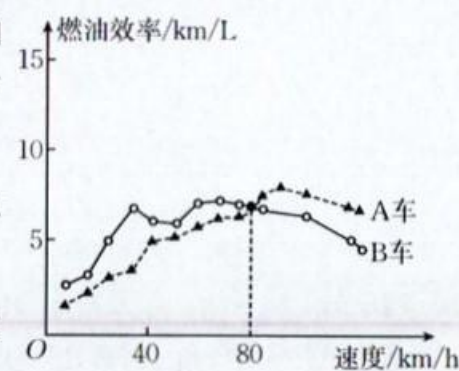
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 对于任意的 $y > x > 0$, 都有 $xf(y) - yf(x) + x^2y - xy^2 > 0$. 若 $f(4) = 4$, 且 $f(x+a) < x^2 + (2a-3)x + a^2 - 3a$ 在 $x \in [1, 4]$ 时恒成立, 则 a 的取值范围为

- A. $(-1, 0)$
- B. $(-1, 4)$
- C. $(0, +\infty)$
- D. $(4, +\infty)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

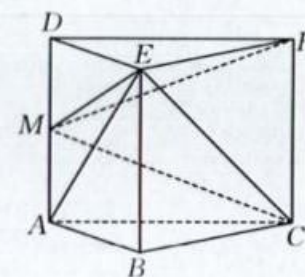
9. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程。如图, 这是 A, B 两辆汽车在不同速度下的燃油效率情况, 则下列结论正确的是

- A. 行驶速度超过 80 km/h 时, 相同条件下, A 车的燃油效率高于 B 车的燃油效率
- B. B 车以 40 km/h 的速度行驶 1 小时, 消耗的汽油不超过 10 升
- C. 某路段机动车最高限速 80 km/h, 相同条件下, 在该路段 A 车更省油
- D. 以 80 km/h 的速度行驶相同路程, A, B 两辆车消耗的汽油一样多



10. 如图, 在直三棱柱 $ABC-DEF$ 中, $AD = AB = BC = 2$, $AB \perp BC$, M 为 AD 的中点, 则

- A. $ME \perp EC$
- B. 三棱锥 $F-MEC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$
- C. 直线 ME 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- D. 三棱锥 $E-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\sqrt{3}\pi$



11. 设集合 $A = \{a | a = (a_1, a_2, a_3), a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$, 且 $\forall x \in \mathbf{R}, a = (a_1, a_2, a_3) \in A, b = (b_1, b_2, b_3) \in A, a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), xa = (xa_1, xa_2, xa_3)$. 定义运算 $\|$: 若满足 ① $\forall a \in A, \|a\| \geq 0$, 且当且仅当 $a = (0, 0, 0)$ 时, $\|a\| = 0$, ② $\forall a \in A, x \in \mathbf{R}, \|xa\| = |x| \cdot \|a\|$, ③ $\forall a, b \in A, \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ 这三个条件, 则称 $\|$ 为 A 上的范数. 下列结论正确的是
 - A. 若 $\|$ 为 A 上的范数, 且 $\exists x, y \in \mathbf{R}, a, b \in A, \|xa + yb\| = 0$, 则 $x = y = 0$
 - B. 若 $\|$ 为 A 上的范数, 则 $\forall x, y \in \mathbf{R}, a, b \in A, \|xa + yb\| \leq |x| \cdot \|a\| + |y| \cdot \|b\|$
 - C. 定义运算 $[]: \forall a = (x, y, z) \in A, [a] = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})^3$, 则 $[]$ 为 A 上的范数
 - D. 定义运算 $[]: \forall a = (x, y, z) \in A, [a] = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $[]$ 为 A 上的范数

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6$ 的极小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 甲、乙、丙等 7 人站成一排拍照留念, 要求甲、乙相邻, 且丙站在正中间位置, 则不同的站法有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种. (用数字作答)
14. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = 2AB = 4$, E, F 分别是棱 PB, PC 上的动点, 则 $AE + EF$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = n^2 + k$ (k 为常数)。

- (1) 求 k 的值；
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (3) 若 $b_n = 2^{a_n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

16. (15 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $c(2 - \cos A) = a \cos C$ 。

- (1) 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$ 的值；
- (2) 若 $A = 60^\circ, b = 6, \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD}$ ，求 AD 的长。

17. (15 分)

某大型超市为回馈广大顾客，开展消费抽奖活动，抽奖规则如下：在一个袋子中放入 4 个红球和 2 个白球，抽奖者从中随机抽取 1 个小球，若取到红球，则将该球放入袋中并将袋中的 1 个白球换成红球，若取到白球，则将该球放入袋中并将袋中的 1 个红球换成白球。按此规则，每位抽奖者依次抽取 3 个小球。奖励规则如下：

取球结果	3 个红球	2 个红球 1 个白球	1 个红球 2 个白球	3 个白球
奖励金额/元	0	10	20	30

已知顾客甲和乙都参与了该大型超市的抽奖活动，且甲、乙获得奖励的结果相互独立。

- (1) 记甲获得的奖励金额为 X ，求 X 的分布列与期望；
- (2) 求甲、乙获得的奖励金额之和不低于 50 元的概率。

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 2e^{1-x}$ ($x > 0$)。

- (1) 求 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
- (2) 求 $f(x)$ 的零点个数；
- (3) 证明： $f(x) \geq 3 \ln x$ 。

19. (17 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，将双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 绕着 y 轴旋转一周构成双曲面 D ，其中 C 在旋转过程中的所有实轴落在 xOz 平面内，设 xOz 所在的平面为 α ，平面 β 满足 $\alpha \parallel \beta$ ，且 α 与 β 之间的距离为 $\sqrt{3}b$ 。

- (1) 若点 $P(x, z, y)$ 在 D 上，试用含 x, z, y 的方程表示 D (不用说明理由)。
- (2) 设 T_α, T_β 分别是 α, β 截得 D 的截面。
 - (i) 设 l_α, l_β 分别为 T_α, T_β 上的弦，求 l_α, l_β 所在直线间的距离的取值范围；
 - (ii) 已知截面 T_β 的圆周上的点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 恰好构成正 n 边形的顶点， P 为 D 上一动点，若对任意 $a > b > 0, \lambda \left| \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} \right| \geq n\sqrt{a^2 - b^2}$ 恒成立，求 λ 的取值范围。