

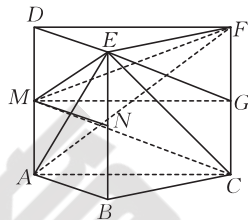
2025 届高三数学试题

参考答案

1. B 因为 $z = \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5-5i+i-i^2}{2} = 3-2i$, 所以 $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
2. D 由题意可得 $4p = (-4)^2$, 解得 $p = 4$, 则 $|AF| = 2 + \frac{p}{2} = 4$.
3. C 由题意可得 $f(0) = 1 + a = 0$, 解得 $a = -1$, 则 $f(a) = f(-1) = -f(1) = -(2 - 5 - 1) = 4$.
4. C 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x = 1$, 则 p 是假命题, 即 $\neg p$ 是真命题. 当 $x = 0$ 时, $x + |x| = 0$, 满足 $x + |x| \leq 0$, 则 q 是真命题.
5. B 由题意可得圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, 则圆心 $C(1, -2)$, 半径 $r = 5$, 则圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$. 因为圆 C 上恰有两个点到直线 l 的距离为 2, 所以 $r - 2 < d < r + 2$, 即 $3 < \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} < 7$, 又 $m > 0$, 所以 $3\sqrt{2} + 1 < m < 7\sqrt{2} + 1$.
6. D $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$, 则 $g(x) = 2 \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6})$. 由 $0 < x < \frac{\pi}{3}$, 得 $-\frac{\pi}{6} < 2\omega x - \frac{\pi}{6} < \frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$. 因为 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调, 所以 $\frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $0 < \omega \leq 1$.
7. A 由 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 可得 $PF_1 \perp PF_2$, 则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$. 因为 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{7}{2}$, 所以 $\frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = \frac{7}{2}$, 则 $|PF_1| |PF_2| = 7$, 从而 $(|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| |PF_2| = |F_1F_2|^2$, 即 $4a^2 - 14 = 4c^2$. 又 C 的离心率为 $\frac{5\sqrt{2}}{8}$, 所以 $\frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$, 解得 $a^2 = 16, c^2 = \frac{25}{2}$, 从而 $b^2 = \frac{7}{2}$, 则 C 的面积为 $\pi ab = 2\sqrt{14}\pi$.
8. A 因为 $y > x > 0$, 所以由 $xf(y) - yf(x) + x^2y - xy^2 > 0$, 可得 $\frac{f(y)}{y} - \frac{f(x)}{x} + x - y > 0$, 即 $\frac{f(y)}{y} - y > \frac{f(x)}{x} - x$. 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x$, 则可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. $g(x+a) - g(4) = \frac{f(x+a)}{x+a} - (x+a) - \frac{f(4)}{4} + 4 = \frac{f(x+a)}{x+a} - (x+a) + 3 = \frac{f(x+a) - x^2 - (2a-3)x - a^2 + 3a}{x+a}$. 由 $f(x+a) < x^2 + (2a-3)x + a^2 - 3a$ 可得 $g(x+a) - g(4) < 0$, 即 $g(x+a) < g(4)$, 则 $0 < x+a < 4$ 在 $x \in [1, 4]$ 时恒成立, 解得 $-1 < a < 0$.
9. ABD 由图可知行驶速度超过 80 km/h 时, 相同条件下, A 车的燃油效率高于 B 车的燃油效

率,则 A 正确. B 车以 40 km/h 的速度行驶 1 小时,行驶 40 km,此时,燃油效率大于 5 km/L,消耗的汽油不超过 10 升,则 B 正确. 行驶速度在 80 km/h 以下时,相同条件下,每消耗 1 升汽油, B 车行驶的路程比 A 车行驶的路程多,所以在该路段 B 车更省油,则 C 错误. 行驶速度为 80 km/h 时, A, B 两辆车每消耗 1 升汽油,行驶的路程相同,所以以 80 km/h 的速度行驶相同路程, A, B 两辆车消耗的汽油一样多,则 D 正确.

10. BC 如图,设 N, G 分别为 EB, FC 的中点,连接 MN, MG, EG, AF .



在直三棱柱 $ABC-DEF$ 中,有 $MD \perp DE, CF \perp EF, AM \perp AC$. 因为 $AD=AB=BC=2, M$ 为 AD 的中点,所以 $ME^2=MD^2+DE^2=5, CE^2=BE^2+BC^2=8$. 又 $AB \perp BC$,所以 $AC^2=AB^2+BC^2=8, MC^2=MA^2+AC^2=9$,则 $ME^2+CE^2 \neq MC^2$,从而 ME 与 EC 不垂直, A

不正确. 易得 $MN \perp$ 平面 EFC ,则 $V_{F-MEC}=V_{M-EFC}=\frac{1}{3}S_{\triangle EFC} \cdot MN=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2=\frac{4}{3}$, B 正确. 易知 $MG \parallel AC$,则 ME 与 AC 所成的角为 $\angle EMG$,由 $MG^2=AC^2=8, EG^2=EF^2+FG^2=5$,得 $\cos \angle EMG=\frac{ME^2+MG^2-EG^2}{2ME \cdot MG}=\frac{\sqrt{10}}{5}$, C 正确. 易知三棱锥 $E-ABC$ 的外接球即为直三棱柱 $ABC-DEF$ 的外接球,该外接球的直径为 $AF=\sqrt{AC^2+CF^2}=2\sqrt{3}$,

则三棱锥 $E-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=12\pi$, D 不正确.

11. BD 因为 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为 A 上的范数,所以由 $\|xa+yb\|=0$,可得 $xa+yb=(0,0,0)$,取 $a=(1,1,1), b=(-1,-1,-1)$,可得 $x+y=0$, A 不正确. 因为 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为 A 上的范数,所以由②③可得 $\|xa+yb\| \leq \|xa\|+\|yb\|=|x| \cdot \|a\|+|y| \cdot \|b\|$, B 正确. 取 $a=(0,-1,0)$,则 $\lceil a \rceil=(\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{0})^3=-1<0$, $\lceil \cdot \rceil$ 不为 A 上的范数, C 不正确. 由 $\lfloor a \rfloor=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,可知 $\lfloor a \rfloor \geq 0$,且当且仅当 $a=(0,0,0)$ 时, $\lfloor a \rfloor=0$,满足①. $\forall k \in \mathbf{R}, a \in A$,可得 $\lfloor ka \rfloor=\sqrt{(kx)^2+(ky)^2+(kz)^2}=|k|\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|k| \cdot \lfloor a \rfloor$,满足②. 设 $a, b \in A$,且 $a=(x_1, y_1, z_1), b=(x_2, y_2, z_2)$,则 $\lfloor a+b \rfloor=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}, \lfloor a \rfloor=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \lfloor b \rfloor=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$,则 $(\lfloor a \rfloor+\lfloor b \rfloor)^2-(\lfloor a+b \rfloor)^2=2\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$. 因为 $(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2 \geq 0$,所以 $\lfloor a+b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor+\lfloor b \rfloor$,满足③. 故 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为 A 上的范数, D 正确.

12. -6 由题意可得 $f'(x)=3x^2-4x+1$. 当 $x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{3})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增,当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,则 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减,故 $f(x)_{\text{极小值}}=f(1)=-6$.

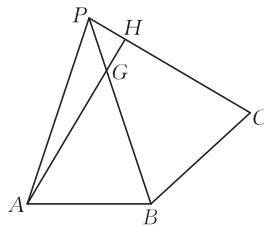
13. 192 甲、乙站在丙的左侧,有 $2A_2^2A_4^4=96$ 种不同的站法;甲、乙站在丙的右侧,有 $2A_2^2A_4^4=$

96 种不同的站法. 故满足条件的站法有 $96+96=192$ 种.

14. $\frac{7\sqrt{15}}{8}$ 如图, 将平面 PAB 与平面 PBC 展开到同一平面, 作 $AH \perp$

PC , 垂足为 H , AH 与 PB 交于点 G , 则 $AE+EF \geq AH$, 当且仅当 E 与 G 重合, 且 F 与 H 重合时, 等号成立. 在 $\triangle PAB$ 中, 由余弦定理可得

$$\cos \angle APB = \frac{PA^2 + PB^2 - AB^2}{2PA \cdot PB} = \frac{7}{8}. \text{ 因为 } 0 < \angle APB < \pi, \text{ 且}$$



$\cos \angle APB > 0$, 所以 $0 < \angle APB < \frac{\pi}{2}$, $\sin \angle APB = \frac{\sqrt{15}}{8}$, 则 $\sin \angle APC =$

$$2\sin \angle APB \cos \angle APB = \frac{7\sqrt{15}}{32}, \text{ 故 } AH = PA \sin \angle APC = \frac{7\sqrt{15}}{8}.$$

15. 解: (1) 因为 $S_n = n^2 + k$, 所以 $a_1 = S_1 = k + 1$, 1 分

$$a_2 = S_2 - S_1 = k + 4 - (k + 1) = 3, \text{ 2 分}$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (k + 9) - (k + 4) = 5. \text{ 3 分}$$

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_1 + a_3 = 2a_2$, 即 $k + 1 + 5 = 2 \times 3$, 解得 $k = 0$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $S_n = n^2$, 则 $S_{n-1} = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 (n \geq 2)$, 6 分

故 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$ 7 分

因为 $a_1 = 1$ 也满足 $a_n = 2n - 1$, 所以 $a_n = 2n - 1$ 8 分

(3) 由 (2) 可知 $b_n = 2^{2n-1}$, 则 $b_{n+1} = 2^{2n+1}$, 故 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 4$ 10 分

因为 $b_1 = 2$, 所以 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公比为 4 的等比数列, 11 分

$$\text{则 } T_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2 \times (1-4^n)}{1-4} = \frac{2^{2n+1}-2}{3}. \text{ 13 分}$$

16. 解: (1) 因为 $c(2 - \cos A) = a \cos C$, 所以 $(2 - \cos A) \sin C = \sin A \cos C$, 1 分

$$\text{所以 } 2\sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C. \text{ 2 分}$$

因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$, 4 分

所以 $2\sin C = \sin B$, 5 分

$$\text{则 } \frac{\sin B}{\sin C} = 2. \text{ 6 分}$$

(2) 因为 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD}$, 所以 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 7 分

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \text{ 即 } 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \text{ 8 分}$$

$$\text{故 } 9\overrightarrow{AD}^2 = 4\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2. \text{ 9 分}$$

由 (1) 可知 $\frac{\sin B}{\sin C} = 2$, 则 $b = 2c$ 10 分

因为 $b = 6$, 所以 $c = 3$, 所以 $\overrightarrow{AB}^2 = c^2 = 9$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos A = 9$, $\overrightarrow{AC}^2 = 36$, 12 分

所以 $9\overrightarrow{AD}^2 = 4 \times 9 + 4 \times 9 + 36 = 108$, 则 $\overrightarrow{AD}^2 = 12$, 13 分

故 $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 即 AD 的长为 $2\sqrt{3}$ 15 分

17. 解: (1) 由题意可得 X 的所有可能取值分别为 0, 10, 20, 30. 1 分

$$P(X=0) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{5}{9}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(X=10) = \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{27}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$P(X=30) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{9}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$P(X=20) = 1 - P(X=0) - P(X=10) - P(X=30) = \frac{4}{27}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

则 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$

..... 6 分

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{5}{9} + 10 \times \frac{5}{27} + 20 \times \frac{4}{27} + 30 \times \frac{1}{9} = \frac{220}{27}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(2) 甲、乙获得的奖励金额之和不低于 50 元的情况有以下三种:

$$\text{第一种情况是甲获得 20 元奖励, 乙获得 30 元奖励, 其概率 } P_1 = \frac{4}{27} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{243}; \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{第二种情况是甲获得 30 元奖励, 乙获得 20 元奖励, 其概率 } P_2 = \frac{1}{9} \times \frac{4}{27} = \frac{4}{243}; \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{第三种情况是甲和乙都获得 30 元奖励, 其概率 } P_3 = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{故甲、乙获得的奖励金额之和不低于 50 元的概率为 } P_1 + P_2 + P_3 = \frac{11}{243}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$18. (1) \text{解: 由 } f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 2e^{1-x} (x > 0), \text{ 得 } f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} + 2e^{1-x}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{则 } f(1) = 0, f'(1) = 3, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 的图象在点 } (1, f(1)) \text{ 处的切线方程为 } y = 3x - 3. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{解: 由 } f(x) = 0, \text{ 得 } e^{1-x} \left[\left(x^2 + \frac{1}{x} \right) e^{x-1} - 2 \right] = 0. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) e^{x-1} - 2, x > 0, \text{ 则 } g'(x) = \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^{x-1} = \frac{e^{x-1}}{x^2} (x^4 + 2x^3 + x - 1). \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = x^4 + 2x^3 + x - 1, x > 0, \text{ 显然 } h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, } \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{且 } h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{16} < 0, h(1) = 3 > 0, \text{ 故 } \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), h(x_0) = 0. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, 则 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 则 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增. 9 分

因为 $g\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100}e^{-\frac{9}{10}} - 2 > \frac{1}{100e} - 2 > 0$, $g(x_0) < g(1) = 0$, 所以 $\exists x_1 \in \left(\frac{1}{10}, x_0\right)$, $g(x_1) = 0$, 从而 $g(x)$ 的零点个数为 2, 即 $f(x)$ 的零点个数为 2. 12 分

(3) 证明: 要证 $f(x) \geq 3\ln x$, 需证 $e^{x-1}\left(x^2 + \frac{1}{x} - 3\ln x\right) \geq 2$ 13 分

令 $\varphi(x) = e^{x-1}\left(x^2 + \frac{1}{x} - 3\ln x\right)$, $x > 0$, 则 $\varphi'(x) = e^{x-1}\left(x^2 + 2x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - 3\ln x\right)$

..... 14 分

令 $H(x) = x^2 + 2x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - 3\ln x$, $x > 0$, 则 $H'(x) = 2x + 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2} + \frac{2x^4 + 2}{x^3} > 0$, 则 $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 15 分

因为 $H(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $H(x) < 0$, 则 $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $H(x) > 0$, 则 $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增, 16 分

从而 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 2$, 证毕. 17 分

19. 解: (1) D 的方程为 $\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 3 分

(2) (i) 若 l_α, l_β 共面, 则 $l_\alpha \parallel l_\beta$, 如图 1, 过弦 l_β 的中点 M 作 $MH \perp \alpha$, 垂足为 H , 过 H 作 $HN \perp l_\alpha$, 垂足为 N , 则 l_α, l_β 所在直线间的距离为 MN 4 分

因为 α 与 β 之间的距离为 $\sqrt{3}b$, 所以 $MH = \sqrt{3}b$, $0 \leq HN < 3a$,
..... 5 分

则 $MN^2 = MH^2 + HN^2 \in [3b^2, 3b^2 + 9a^2)$,

故 $MN \in [\sqrt{3}b, \sqrt{3b^2 + 9a^2})$ 6 分

若 l_α, l_β 异面, 如图 2, 设 $CD = l_\alpha, AB = l_\beta$, 且 $A(x_1, z_1, \sqrt{3}b)$, $B(x_2, z_2, \sqrt{3}b)$, $C(x_3, z_3, 0)$, $D(x_4, z_4, 0)$, 则 $(x_2 - x_1)(z_4 - z_3) \neq (x_4 - x_3)(z_2 - z_1)$ 7 分

设向量 $\mathbf{n} = (x_0, z_0, y_0)$ 满足 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB}$ 且 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{CD}$,

则由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_0(x_2 - x_1) + z_0(z_2 - z_1) = 0, \\ x_0(x_4 - x_3) + z_0(z_4 - z_3) = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_0 = 0, \\ z_0 = 0, \end{cases}$ 取 $y_0 = 1$, 则 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 8 分

$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, z_3 - z_1, -\sqrt{3}b)$, 设 l_α, l_β 所在直线间的距离为 d ,

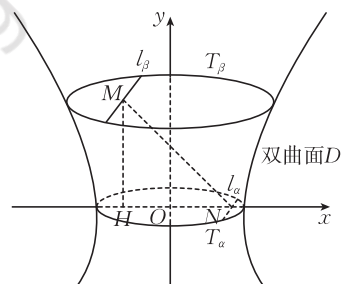


图 1

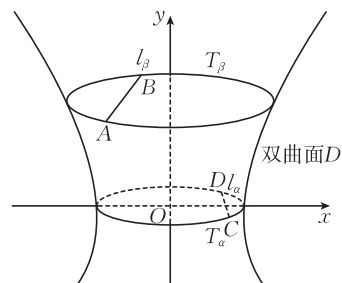


图 2

$$\text{则 } d = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|0 \cdot (x_3 - x_1) + 0 \cdot (z_3 - z_1) - \sqrt{3}b \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \sqrt{3}b. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

综上所述, l_α, l_β 所在直线间的距离的取值范围为 $[\sqrt{3}b, \sqrt{3b^2 + 9a^2})$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(ii) 设 $A_i = (x_i, z_i, \sqrt{3}b) (i=1, 2, 3, \dots, n), P = (x, z, y)$,

$$\text{易知 } x_i^2 + z_i^2 = 4a^2, \frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

因为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 恰好构成正 n 边形的顶点, 所以 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n z_i = 0$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{由 } \overrightarrow{PA_i} = (x_i - x, z_i - z, \sqrt{3}b - y), \text{ 可得 } \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} = (\sum_{i=1}^n (x_i - x), \sum_{i=1}^n (z_i - z), n(\sqrt{3}b - y)),$$

$$\text{则 } |\sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i}|^2 = [\sum_{i=1}^n (x_i - x)]^2 + [\sum_{i=1}^n (z_i - z)]^2 + n^2(\sqrt{3}b - y)^2 = [(\sum_{i=1}^n x_i) - nx]^2 + [(\sum_{i=1}^n z_i) - nz]^2 + n^2(\sqrt{3}b - y)^2 = n^2(x^2 + z^2) + n^2(\sqrt{3}b - y)^2. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 可得 } x^2 + z^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2, \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{则 } |\sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i}|^2 = n^2 \left[a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + (\sqrt{3}b - y)^2 \right] = n^2 \left[\frac{a^2 + b^2}{b^2} \left(y - \frac{\sqrt{3}b^3}{a^2 + b^2} \right)^2 + \frac{a^4 + 4a^2b^2}{a^2 + b^2} \right] \geq n^2 \cdot \frac{a^4 + 4a^2b^2}{a^2 + b^2}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \lambda |\sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i}| \geq n\sqrt{a^2 - b^2} \text{ 恒成立, 可得 } \lambda^2 |\sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i}|^2 \geq n^2(a^2 - b^2),$$

$$\text{则 } \lambda^2 \geq \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{a^4 + 4a^2b^2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 4\left(\frac{a}{b}\right)^2}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t = \frac{a^2}{b^2}, \text{ 由 } a > b > 0, \text{ 可得 } t > 1, \text{ 则 } \lambda^2 \geq \frac{t^2 - 1}{t^2 + 4t} = 1 - \frac{4t + 1}{t^2 + 4t}.$$

$$\text{因为 } t^2 + 4t > 4t + 1 > 0, \text{ 所以 } 1 - \frac{4t + 1}{t^2 + 4t} < 1, \text{ 且当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时, } \frac{4t + 1}{t^2 + 4t} \rightarrow 0, \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \lambda^2 \geq 1, \text{ 故 } \lambda \text{ 的取值范围为 } [1, +\infty). \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$