

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. $(1+5i)i$ 的虚部为

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

【答案】C

$z = (1+5i)i = -5 + i$ ，所以 z 的虚部为 1，选 C.

2. 设全集 $U = \{x | x \text{ 为小于 9 的正整数}\}$ ， $A = \{1, 3, 5\}$ ，则 $\complement_U A$ 中的元素个数为

- A. 0 B. 3 C. 5 D. 8

【答案】C

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $A = \{1, 3, 5\}$ ，所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ ，共 5 个元素，选 C.

3. 双曲线虚轴长是实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，求离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

由题知 $2b = \sqrt{7} \times 2a$ ，所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{7}$ ，

双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2\sqrt{2}$ ，选 D.

4. 已知点 $(a, 0) (a > 0)$ 是函数 $y = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像的一个对称中心，则 a 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】B

因为 $\tan x$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$, 所以 $y = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$, 所以 $a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 又 $a > 0$, 所以 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 选 B.

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5 - 2x$, 则

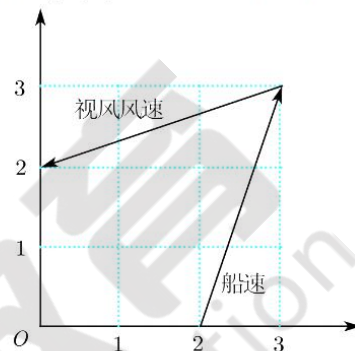
$$f\left(-\frac{3}{4}\right) =$$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$



【答案】A

由题知 $f(-x) = f(x)$, $f(x+2) = f(x)$, 所以

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{11}{4}\right) = 5 - 2 \times \frac{11}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ 选 A.}$$

6. 帆船比赛中, 运动员可借助风力计测定风速的大小和方向, 测出的结果在航海学中称为视风风速, 视风风速对应的向量, 是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和, 其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等, 方向相反. 图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2 (风速的大小和向量的大小相同, 单位 m/s), 则真风为

A. 轻风

B. 微风

C. 和风

D. 劲风

等级	风速大小 m/s	名称
2	1.1 ~ 3.3	轻风
3	3.4 ~ 5.4	微风
4	5.5 ~ 7.9	和风
5	8.0 ~ 10.1	劲风

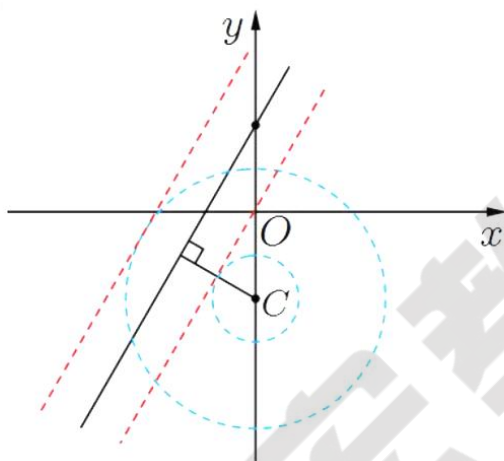
【答案】A

真风风速 + 船行风速 = 视风风速, $\therefore$ 真风风速 = 视风风速 + 船速

$\overrightarrow{\text{视风风速}} = (-3, -1)$, $\overrightarrow{\text{船速}} = (1, 3)$, $\therefore \text{真风风速} = (-2, 2)$

$\therefore |\text{真风风速}| = 2\sqrt{2} \in (1.1, 3.3)$ 为轻风, 选: A.

7. 已知圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2$ ($r > 0$) 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个, 则 r 的取值范围是



- A. $(0, 1)$ B. $(1, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

【答案】B

由题知圆心 $C(0, -2)$, 半径为 r , 圆心 C 到直线的距离

$$d = \frac{|0 - (-2) + 2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 2, \text{所以要使圆 } C \text{ 上到直线 } y = \sqrt{3}x + 2 \text{ 的距离为 } 1 \text{ 的点有且仅有两个,}$$

则 $1 < r < 3$, 选 B.

8. 已知 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$, 则 x, y, z 的大小关系不可能为

- A. $x > y > z$ B. $x > z > y$ C. $y > x > z$ D. $y > z > x$

【答案】B

令 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = k$, 则 $x = 2^{k-2}$, $y = 3^{k-3}$, $z = 5^{k-5}$

$k = 5$, $y > x > z$; $k = 4$, $x > y > z$; $k = 10$, $z > y > x$; $k = 8$, $y > z > x$ (此时已经

知道答案为 B, 下面验证)

$$z > y \Rightarrow 5^{k-5} > 3^{k-3}, \quad k > \frac{\ln \frac{3125}{27}}{\ln \frac{5}{3}}, \quad \text{此时 } \frac{y}{x} = \frac{3^{k-3}}{2^{k-2}} = \frac{3^{k-3}}{2^{k-3} \cdot 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{k-3}$$

$$> \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{\ln \frac{3125}{27}}{\ln \frac{5}{3}} - 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{\ln 25}{\ln \frac{5}{3}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{8} > 1 \quad (\text{此时 } y > x), \quad \therefore \text{不可能有 } x > z > y, \quad \text{选 B.}$$

点评：三个值相等设为 k , x, y, z 都用 k 表示, k 取出不同的值, 得到不同的 x, y, z 大小关系, 在考试中, 不要再去验证答案了, 本题一到两分钟就该找到正确的结果。

二、选择题：本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为 BC 中点, 则

A. $AD \perp A_1C$

B. $B_1C \perp \text{平面 } AA_1D$

C. $CC_1 \parallel \text{平面 } AA_1D$

D. $AD \parallel A_1B_1$

【答案】BD

10. 设抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交 C 于 A, B , 过 F 且垂直于 AB 的直线

交 $l: y = -\frac{3}{2}x$ 于 E , 过 A 作 $x = -\frac{3}{2}$ 的垂线, 垂足为 D , 则

A. $|AD| = |AF|$

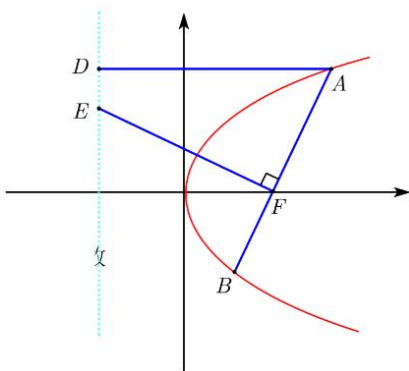
B. $|AE| = |AB|$

C. $|AB| \geq 6$

D. $|AE| \cdot |BE| \geq 18$

【答案】ACD

$F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 由抛物线的定义知 $AD = AF$, A 对.



$AB \geq 2p = 6$, C 对.

$$\text{令 } AB: x = my + \frac{3}{2}, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \begin{cases} x = my + \frac{3}{2} \\ y^2 = 6x \end{cases} \text{消 } y \text{ 可得 } y^2 - 6my - 9 = 0$$

$$y_1 + y_2 = 6m, y_1 y_2 = -9, x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 3 = 6m^2 + 3,$$

$$AB: x_1 + \frac{3}{2} + x_2 + \frac{3}{2} = 6m^2 + 6, m = 0 \text{ 时 } E\left(-\frac{3}{2}, 0\right), AB = 6, EF = 3, \text{ 此时 } EF \neq AB,$$

$\therefore$ B 错.

$$\text{此时 } AE = BE = 3\sqrt{2}, AE \cdot BE = 18, m \neq 0 \text{ 时, } EF: x = -\frac{1}{m}y + \frac{3}{2}, E\left(-\frac{3}{2}, 3m\right)$$

$$EF = \sqrt{9 + 9m^2}, S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} AE \cdot BE \sin \angle AEB = \frac{1}{2} AB \cdot EF = \frac{1}{2} (6m^2 + 6) \sqrt{9 + 9m^2} > 9$$

$$AE \cdot BE > \frac{18}{\sin \angle AEB} > 18, \text{ 综上 } AE \cdot BE \geq 18, \text{ D 对, 选 ACD.}$$

$$11. \cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}, \cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$$

$$A. \sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$$

$$B. AC^2 + BC^2 = 3$$

$$C. AB = \sqrt{2}$$

$$D. \sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

【答案】ACD

$$1 - 2\sin^2 A + 1 - 2\sin^2 B + 2\sin C = 2, \therefore \sin^2 A + \sin^2 B = \sin C, \text{ A 正确.}$$

对于 B, $AC^2 + BC^2 = AB^2 = 2$, B 错.

$$\text{由 } \sin^2 A + \sin^2 B = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

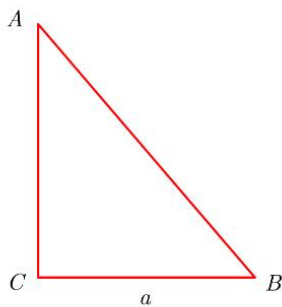
$$\therefore \sin A(\sin A - \cos B) + \sin B(\sin B - \cos A) = 0, \because A, B \text{ 为锐角, 若 } A + B > \frac{\pi}{2}$$

$$\text{则 } \begin{cases} A > \frac{\pi}{2} - B \\ B > \frac{\pi}{2} - A \end{cases}, \therefore \sin A > \cos B, \sin B > \cos A, \therefore \text{矛盾, 舍去, } A + B < \frac{\pi}{2} \text{ 也矛盾}$$

$$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}, \therefore B=\frac{\pi}{2}-A, C=\frac{\pi}{2}, \sin A \cos A=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2A=\frac{1}{4}, \sin 2A=\frac{1}{2}$$

$$\text{不妨设 } 2A=\frac{\pi}{6}, A=\frac{\pi}{12}, B=\frac{5\pi}{12}, a=c \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, b=c \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{4}{16}=\frac{1}{4}, \therefore c=\sqrt{2}, C \text{ 正确.}$$



$$\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}, D \text{ 正确.}$$

选：ACD.

点评：解三角形，构造比较巧妙，可以验证出 c 为直角，这个结论起到承上启下的作用，

这个结论选出来才能选出正确的选项。平时多积累一些题型和方法还是很有必要的。

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的切线，则 $a=$ _____.

【答案】 4

设切点 $P(x_0, e^{x_0}+x_0+a)$, $f'(x)=e^x+1$

$$\therefore \begin{cases} e^{x_0}+1=2 \\ 2x_0+5=e^{x_0}+x_0+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ a=4 \end{cases}, \therefore a=4.$$

13. 若一个等比数列的前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为_____.

【答案】 ± 2

$$\text{由题意知 } q \neq 1, \therefore \begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 4 \\ \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 68 \end{cases} \Rightarrow 1+q^4=17, \quad q^4=16, \quad q=\pm 2.$$

14. 一个箱子里有5个球, 分别以1~5标号, 若有放回取三次, 记至少取出一次的球的个数 X , 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{61}{25}$

$$X=1,2,3, \quad P(X=1) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 5 = \frac{1}{25},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} \times 2 \cdot C_5^2 = \frac{12}{25}, \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 6 \times C_5^3 = \frac{12}{25}$$

$$\therefore E(X) = \frac{1}{25} + \frac{24}{25} + \frac{36}{25} = \frac{61}{25}.$$

点评：第一问就劝退了一批学生，要放开胆量求导，然后求极值点分析单调性.第二问，有很多学生题目都读不懂，它属于探究和理解型及构造类的问题，本题关键是关于 a 的范围的约束，根据周期性可以将 a 限制在 $[0, 2\pi)$ 进行分析，结合 $\cos x$ 的单调性进行处理就可以了.第三问逻辑词扎堆，属于存在任意型双逻辑问题，逻辑词处理遵循就近原则，本质上是求左边函数最大值的最小值，最自然的方法就是借助第二问的结论，先探出 b 的最小值.然后结合第二问的结论，对于 $b < 3\sqrt{3}$ ，总能找到这样的反例，使左边函数 $> 3\sqrt{3}$ 了，这样就导出矛盾了，也是构造类的典范，硬怼当然也可以.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分) 为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了1000人，得到如下列联表：

超声波检查结果		正常	不正常	合计
组别				

患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

- (1) 记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p ，求 p 的估计值；
- (2) 根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关。

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

- (1) 超声波检查结果不正常者有 200 人

这 200 人中患该疾病的有 180 人, $p = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$

- (2) 零假设 H_0 : 超声波检查结果与是否患该疾病无关

$$\chi^2 = \frac{1000(20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{800 \times 200 \times 200 \times 800} \approx 765.625 > 10.828$$

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立

即认为超声波检查结果与是否患该疾病有关。

16. (15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

- (1) 证明: 数列 $\{na_n\}$ 是等差数列;
- (2) 给定正整数 m , 设函数 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$, 求 $f'(-2)$.

$$(1) \frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}, \quad (n+1)a_{n+1} = na_n + 1, \quad \therefore (n+1)a_{n+1} - na_n = 1$$

$\therefore \{na_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

$$(2) \quad 1a_1 = 3, \quad \therefore na_n = 3 + (n-1) \cdot 1 = n+2, \quad \therefore a_n = \frac{n+2}{n}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_mx^{m-1}$$

$$f'(x) = 3 + 4x + 5x^2 + \cdots + (m+2)x^{m-1} \quad ①,$$

$$xf'(x) = 3x + 4x^2 + \cdots + (m+1)x^{m-1} + (m+2)x^m \quad ②,$$

$$① - ②, \quad (1-x)f'(x) = 3 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} - (m+2)x^m, \quad x = -2$$

$$3f'(-2) = 3 + \frac{-2[1 - (-2)^{m-1}]}{1 - (-2)} - (m+2)(-2)^m$$

$$3f'(-2) = 3 + \frac{-2 - (-2)^m}{3} - (m+2)(-2)^m = \frac{7}{3} - \left(m + \frac{7}{3}\right)(-2)^m$$

$$f'(-2) = \frac{7}{9} - \left(\frac{m}{3} + \frac{7}{9}\right)(-2)^m.$$

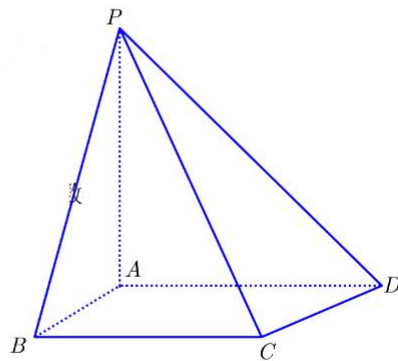
17. (15分) 如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA = AB = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$, P, B, C, D 在同一个球面上, 设该球面的球心为 O .

(i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;

(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.

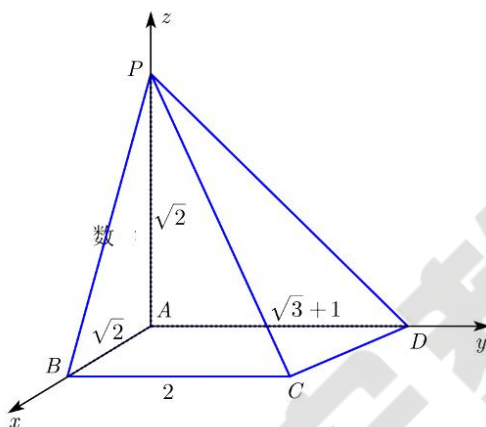


(1) $AB \perp AD$, 又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp AB$

$AD \cap PA = A$, $AD, PA \subset \text{平面} PAD$, $\therefore AB \perp \text{平面} PAD$

$AB \subset \text{平面} PAB$, $\therefore \text{平面} PAB \perp \text{平面} PAD$.

(2) $PA \perp \text{平面} ABCD$, $\therefore PA \perp AD$, $\therefore AB, AD, AP$ 两两垂直, 分别以 AB, AD, AP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $A - xyz$.



则 $B(\sqrt{2}, 0, 0)$, $C(\sqrt{2}, 2, 0)$, $D(0, \sqrt{3}+1, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$

(i) 设球心 $O(x, y, z)$, 半径 R ,

$$\text{则} \begin{cases} OP = R \\ OB = R \\ OC = R \\ OD = R \end{cases}, \therefore \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2} = R \\ \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + y^2 + z^2} = R \\ \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 + z^2} = R \\ \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{3} - 1)^2 + z^2} = R \end{cases}, \therefore \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ R = \sqrt{3} \end{cases}$$

$O(0, 1, 0)$, $\therefore O \in \text{平面} ABCD$.

(ii) $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{2}, 2, 0)$, $\overrightarrow{PO} = (0, 1, -\sqrt{2})$

$$\cos \langle AC, PO \rangle = \left| \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PO} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PO}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{PO}|} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

18. (17 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 下顶点为 A , 右顶点为 B ,

$$|AB| = \sqrt{10}.$$

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知动点 P 不在 y 轴上, 点 R 在射线 AP 上, 且满足 $|AP| \cdot |AR| = 3$.

(i) 设 $P(m, n)$, 求 R 的坐标 (用 m, n 表示);

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值.

方法一:

$$(1) \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases}, \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$

$$(2) Q(x_0, y_0), A(0, -1), P(m, n), \because |AP| \cdot |AQ| = 3, \overrightarrow{AP} = (m, n+1),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 3, \overrightarrow{AQ} = (x_0, y_0 + 1) \Rightarrow mx_0 + (n+1)y_0 = 2 - n \quad ①,$$

$$AP: y = \frac{n+1}{m}x - 1, \because Q \text{ 在 } AP \text{ 上}, \therefore y_0 = \frac{n+1}{m}x_0 - 1 \Rightarrow (n+1)x_0 - my_0 = m \quad ②,$$

$$\text{联立①②} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2} \\ y_0 = \frac{-m^2 - n^2 + n + 2}{m^2 + (n+1)^2} \end{cases}$$

$$(3) k_1 = k_{OQ} = \frac{-m^2 - n^2 + n + 2}{3m}, k_2 = k_{OP} = \frac{n}{m}, \because 3k_2 = k_1$$

$$\therefore \frac{3n}{m} = \frac{-m^2 - n^2 + n + 2}{3m}, M(x_1, y_1) \rightarrow x_1^2 = 9 - 9y_1^2 \Rightarrow m^2 + (n-4)^2 = 18$$

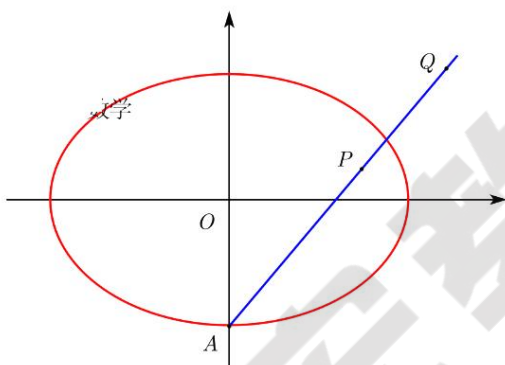
$\therefore P$ 轨迹为以 $C(0, 4)$ 为圆心, $3\sqrt{2}$ 为半径的圆

$$\therefore |PM|_{\max} = |MC|_{\max} + r = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - 4)^2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{9 - 9y_1^2 + y_1^2 - 8y_1 + 16} + 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{-8y_1^2 - 8y_1 + 25} + 3\sqrt{2}, \text{ 当 } y_1 = -\frac{1}{2} \text{ 时, } |PM|_{\max} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$$

方法二： (1) 由题意知
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{椭圆: } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$

(2) 设 $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$, $A(0, -1)$, $AP \cdot AQ = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}^2 = 3$, $\therefore \lambda = \frac{3}{m^2 + (n+1)^2}$



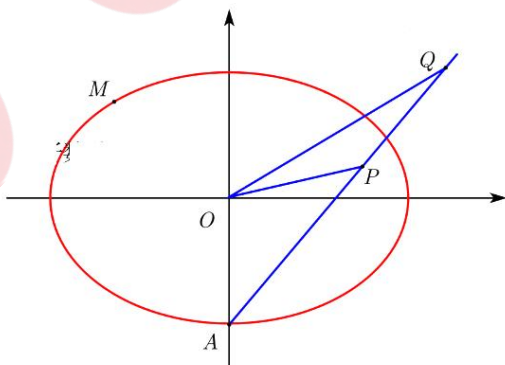
$$\therefore \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{m^2 + (n+1)^2} (m, n+1) = \left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} \right)$$

$$\therefore Q \left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1 \right)$$

(3) $k_1 = \frac{3(n+1) - m^2 - (n+1)^2}{3m}$, $k_2 = \frac{n}{m}$

$$\frac{3(n+1) - m^2 - (n+1)^2}{3m} = \frac{3n}{m}, \therefore m^2 + n^2 + 8n - 2 = 0$$

$\therefore P$ 在圆 $B: x^2 + (y+4)^2 = 18$ 上运动, $B(0, -4)$, $M(x_0, y_0)$



$$\therefore |PM| \leq |MB| + 3\sqrt{2} = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 4)^2} + 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{9 - 9y_0^2 + y_0^2 + 8y_0 + 16} + 3\sqrt{2} = \sqrt{-8y_0^2 + 8y_0 + 25} + 3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

当且仅当 $y_0 = \frac{1}{2}$ 时取 “=” .

跳出了圆锥曲线的常规考察范畴，第二问将向量作为工具融入到圆锥曲线里面，非常具有创新性，而且竟然考察的是这种用已知点表示另一个已知点的坐标，非常具有动态性和前瞻性，第三问将线段长度最值问题和轨迹问题融合进行考察，也相当于将隐形圆加入其中，弥补了直线与圆考察的空缺，非常赞的一道题。

19. (17分) 设函数 $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值;

(2) 给定 $\theta \in (0, \pi)$, 设 a 为实数, 证明: 存在 $y \in (a - \theta, a + \theta)$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$;

(3) 若存在 t 使得对任意 x , 都有 $5\cos x - \cos(5x + t) \leq b$, 求 b 的最小值.

【锤子数学解析】

$$(1) f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x = 5(\sin 5x - \sin x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$$\therefore f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

(2) 不妨设 $a \in (0, 2\pi)$, 若 $a < 2\theta$, $\theta \in [a - \theta, a + \theta]$, 取 $y = \theta$ 即可!

若 $a \geq 2\theta$, $\theta \leq a - \theta \leq 2\pi - \theta$, $\cos(a - \theta) \leq \cos \theta$, 取 $y = a - \theta$ 即可!

(3) **方法一:** $g(x) = 5\cos x - \cos(5x + t)$, 下证 $b = 3\sqrt{3}$ 为所求.

①若 $b < 3\sqrt{3}$, 不妨设 $t \in [-\pi, \pi)$, 则 $|g(x)| < 3\sqrt{3}$, $\forall x \in \mathbf{R}$

$$\text{有 } g\left(\frac{\pi - t}{6}\right) = 5\cos\frac{\pi - t}{6} - \cos\left(\frac{5\pi - 5t}{6} + t\right) = 5\cos\frac{t - \pi}{6} + \cos\frac{t - \pi}{6} = 6\cos\frac{t - \pi}{6} < 3\sqrt{3}$$

$$g\left(\frac{-\pi-t}{6}\right)=5\cos\frac{\pi+t}{6}-\cos\left(\frac{-5\pi-5t}{6}+t\right)=6\cos\frac{\pi+t}{6}<3\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{t-\pi}{6}<\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{t+\pi}{6}<\frac{\sqrt{3}}{2}, t\in[-\pi,\pi), \text{ 则 } \frac{t-\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right), \frac{t+\pi}{6}\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{t-\pi}{6}<-\frac{\pi}{6} \\ \frac{t+\pi}{6}>\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t<0 \\ t>0 \end{cases} \text{ 矛盾}$$

②若 $b=3\sqrt{3}$, 则取 $t=0$, $f(x)=5\cos x-\cos 5x=5\cos x-(16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x)$
 $=20t^3-16t^5, t=\cos x$

证明 $\forall t\in[-1,1]$ 有 $20t^3-16t^5\leq 3\sqrt{3}$, $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等

下证 $t^6(20-16t^2)^2\leq 27 \Leftrightarrow x^3(20-16x)^2\leq 27, \forall x\in[0,1]$

均值: $\left(\frac{32}{3}x\right)^3(20-16x)^2\leq\left(\frac{40}{5}\right)^5=8^5\Rightarrow x^3(20-16x)^2\leq 27$, 得证.

方法二: 由余弦函数周期性可令 $\varphi\in[0,2\pi)$.

①当 $\varphi=0$ 时,

$$\begin{aligned} [5\cos x-\cos(5x+\varphi)]^2 &= [5\cos x-(16\cos^5 x-20\cos^3 x+\cos x)]^2 \\ &= \frac{2^{10}}{9}(\cos^2 x)^3\cdot\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\cos^2 x\right)^2 \\ &\leq \frac{2^{10}}{9}\cdot\left[\frac{3\cos^2 x+2\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\cos^2 x\right)}{5}\right]^5 = 27 \Rightarrow b\geq 3\sqrt{3} \Rightarrow b_{\min}=3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

②当 $\varphi\in(0,2\pi)$ 时, 取 $x=\frac{\pi-\varphi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$,

$$\text{则 } 5\cos x-\cos(5x+\varphi)=5\cos x-\cos\left(\frac{5\pi+\varphi}{6}\right)=6\cos x\geq 3\sqrt{3}\Rightarrow b_{\min}=3\sqrt{3}$$

综上可得: $b_{\min}=3\sqrt{3}$

19. (3) 一方面 $b = 3\sqrt{3}$ 时, 取 $t = 0$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $5 \cos x - \cos(5x) \leq b$

$\Rightarrow b = 3\sqrt{3} \geq f(x)_{\max}$, 另一方面对 $\forall b < 3\sqrt{3}$,

由 (2) 知, 取 $\theta = \frac{5\pi}{6}$, 则 $\exists y_0 \in \left[t - \frac{5\pi}{6}, t + \frac{5\pi}{6}\right]$ 使 $\cos y_0 \leq \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

令 $x = \frac{y_0 - t}{5} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

$\therefore 5 \cos x - \cos(5x + t) = 5 \cos x - \cos y_0 \geq \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} > b$, 矛盾, 不合题意

$\therefore b_{\min} = 3\sqrt{3}$. |