2025年普通高等学校招生全国统一考试(新II卷)

数学

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

1. 答卷前,考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号,试室号,座位号填写在答题卡上。用$2B$铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。

2. 选择题每小题选出答案后,用$2B$铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再填涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案,不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。(题为回忆版,可能会有些许错误,公众号:MST 数学聚集地 MathHub)

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分,每小题只有一个选项符合要求

1. 样本数据2,8,14,16,20的平均数为　　(　　)

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

2. 已知$z=1+i$,则$\dfrac{1}{z-1}=$　　(　　)

A. -i　　B. i　　C. -1　　D. 1

3. 已知集合$A=\{-4,0,1,2,8\}$,$B=\{x|x^3=x\}$,则$A\cap B=$　　(　　)

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$　　C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

4. 不等式$\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$的解集是　　(　　)

A. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|x\leqslant -2\}$　　C. $\{x|-2\leqslant x<1\}$　　D. $\{x|x>1\}$

5. 在ΔABC中,$BC=2$,$AC=1+\sqrt{3}$,$AB=\sqrt{6}$,则$A=$　　(　　)

A. 45°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 135°

6. 设抛物线C:$y^2=2px(P>0)$的焦点为F,点A在C上,过A作C准线的垂线,垂足为B.若直线BF的方程为$y=-2x+2$,则$|AF|=$　　(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$S_3=6$,$S_5=-5$,则$S_6=$　　(　　)

A. -20　　B. -15　　C. -10　　D. -5

8. 已知$0<\alpha<\pi$,$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,则$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$　　(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，q 为 $\{a_n\}$ 的公比，$q>0$. 若 $S_3=7.a_3=1$，则　(　　)

A. $q=\frac{1}{2}$　　B. $a_5=\frac{1}{9}$　　C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则　(　　)

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$，当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，左、右顶点分别为 A_1,A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与曲线 C 的一条渐近线交于 M,N 两点，且 $\angle NA_1M=\frac{5\pi}{6}$，则　(　　)

A. $\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$

B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$

D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1),\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=$______.

13. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$______.

14. 一个底面半径为4 cm，高为9 cm的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为______cm.

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15.（13分）

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)\ (0\leqslant\varphi<\pi)$，$f(0)=\frac{1}{2}$.

(1) 求 φ；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16.（15 分）

已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4,

(1) 求 C 的方程；

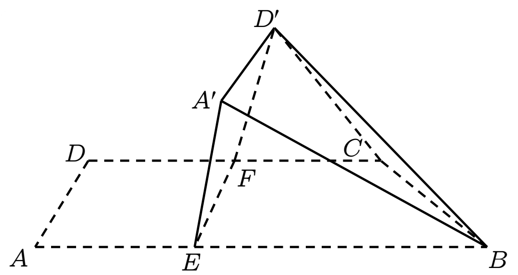
(2) 过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与 C 交于 A、B 两点，O 为坐标原点. 若 ΔOAB 的面积为 $\sqrt{2}$，求 $|AB|$.

17. (15分)

如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$, $\angle DAB=90°$，F 为 CD 中点，E 在 AB 上，$EF//AD$，$AB=3AD$, $CD=2AD$，将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°.

(1)证明：$A'B$ // 平面 $CD'F$.

(2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.



18.（17 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$.

(1) 证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点；

(2) 设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的极值点和零点.

（i）设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，证明：$g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 单调递减；

（ii）比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明你的结论.

19.（17 分）

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分、负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$，乙胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球的胜负相互独立，对正整数 $k\geqslant 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个的球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3,p_4（用 p 示）

(2) 若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p；

(3) 证明：对任意正整数 m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.