

成都市 2023 级高中毕业班摸底测试

数 学

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 的渐近线方程为

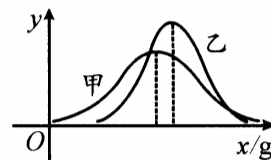
- A. $2x \pm y = 0$ B. $x \pm 2y = 0$ C. $4x \pm y = 0$ D. $x \pm 4y = 0$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 3, a_4 + a_6 = 2$, 则 $a_7 =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

3. 已知甲、乙两批袋装食盐的质量(单位:g)分别服从正态分布 $N(\mu_{\text{甲}}, \sigma_{\text{甲}}^2)$ 和 $N(\mu_{\text{乙}}, \sigma_{\text{乙}}^2)$, 其正态曲线如图所示, 则

- A. $\mu_{\text{甲}} > \mu_{\text{乙}}, \sigma_{\text{甲}} > \sigma_{\text{乙}}$
B. $\mu_{\text{甲}} > \mu_{\text{乙}}, \sigma_{\text{甲}} < \sigma_{\text{乙}}$
C. $\mu_{\text{甲}} < \mu_{\text{乙}}, \sigma_{\text{甲}} > \sigma_{\text{乙}}$
D. $\mu_{\text{甲}} < \mu_{\text{乙}}, \sigma_{\text{甲}} < \sigma_{\text{乙}}$



4. 函数 $f(x) = x + \sin x$ 的图象在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为

- A. $x + y - \pi - 1 = 0$ B. $x + y - 1 = 0$ C. $x - y + 1 = 0$ D. $x - y = 0$

5. 已知圆锥的高为 1, 母线与底面所成角的大小为 30° , 则该圆锥的体积为

- A. π B. $\sqrt{3}\pi$ C. 2π D. 3π

6. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_9 + 7S_6 = 8S_3$, 则 $\{a_n\}$ 的公比为

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

7. 在连续五天时间里, 甲、乙、丙、丁四名同学分别到夕阳红敬老院参加志愿者活动, 每天一人, 其中甲参加两天, 其余三人各参加一天, 则甲不在相邻两天的安排方法有

- A. 24 种 B. 36 种 C. 48 种 D. 60 种

8. 已知 a 为常数, 函数 $f(x) = (x-a)\ln x$ 存在极大值, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为

- A. $(0, a)$ B. $(1, a)$ C. $(a, 1)$ D. $(0, 1)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 设函数 $f(x) = x^3 - 3x + 3$, 则

- A. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减 B. $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[3, 5]$
C. $f(x)$ 有三个零点 D. 曲线 $y = f(x)$ 关于点 $(0, 3)$ 对称

10. 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中, 后人称为“三角垛”。

“三角垛”的最上层有 1 个球, 第二层有 3 个球, 第三层有 6 个球, 第四层有 10 个球……设第 n 层有 a_n 个球, 则

- A. $a_5 = 15$
B. $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等差数列
C. a_{2025} 为偶数
D. $1 \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$



11. 眼睛是心灵的窗户, 保护视力从青少年开始. “近视”(设为事件 A)和“老花”(设为事件 B)是影响中老年人学习与生活质量的重要视力因素. 设 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{B}|A) = \frac{2}{3}$, 则

- A. A 与 B 互为对立 B. A 与 B 相互独立
C. $P(A+B) = P(\bar{B})$ D. $P(A|B) = P(\bar{A}|\bar{B})$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 在 $(x^2 + \frac{1}{x})^5$ 的展开式中， x 的系数为_____（用数字作答）。

13. 若函数 $f(x) = ax - \cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围为_____。

14. 袋中装有大小相同的三个小球，其编号分别为 1, 2, 3. 每次从袋中随机地摸出一个小球，记下编号后放回袋中，搅拌均匀再进行摸取. 设第 n 次摸取小球的编号为 a_n ($n=1, 2,$

$\dots, 7$)，则在 $E_k: \frac{x^2}{a_k} + \frac{y^2}{a_{k+1}} = 1$ ($k=1, 2, \dots, 6$) 中：圆的个数 X 的均值为_____；有且

只有 E_6 是焦点在 x 轴上的椭圆的概率为_____。

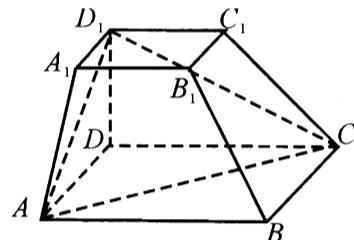
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

如图，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下底面是边长为 2 的正方形，侧棱 D_1D 与底面垂直，且 $D_1D = D_1C_1 = 1$ 。

(1) 证明： $BB_1 \parallel$ 平面 ACD_1 ；

(2) 求平面 ACD_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角的大小。



16. (本小题满分 15 分)

以“‘智’在必得”为主题的人工智能知识挑战赛预赛由 6 道正误判断题组成，每位选手从中随机抽取 3 道，若能全部回答正确，则通过预赛. 已知选手甲会做其中的 4 道题。

(1) 设 X 表示选手甲抽到会做题目的道数，求随机变量 X 的分布列和方差；

(2) 假设选手甲会做的题全部答对；不会做的题随机判断，答对的概率为 $\frac{1}{2}$. 若各题作答结

果互不影响，求他通过预赛的概率。

17. (本小题满分 15 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_2=6$, 且 $(n+2)S_n=na_{n+1}$.

(1) 求 S_1, S_2, S_3 ;

(2) 在下列两个结论中, 任选一个加以证明; (若两个都证明, 以首选计分)

① $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等比数列; ② $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$ 是等比数列.

(3) 记 T_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

18. (本小题满分 17 分)

过点 $P(-1, 0)$ 作直线 l 与抛物线 $C: y^2=4x$ 交于 A, B 两点.

(1) 设 O 为坐标原点, 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值;

(2) 若以线段 AB 为直径的圆与 y 轴相切, 求 l 的方程;

(3) 过点 P 作直线 l' (不同于 l) 与 C 交于 M, N 两点, 且直线 AM 与 y 轴交于点 Q , 证明:

$\triangle PBN$ 与 $\triangle QBN$ 的面积相等.

19. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若 $f(x) \leq 2kx + k$ 恒成立, 求 k 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{i!}{(i+1)^{i+2}} < \frac{e}{8(e-1)} (n \in \mathbb{N}^*)$.