

成都市 2023 级高中毕业班摸底测试

数学试题参考答案及评分意见

一、选择题：(每小题 5 分，共 40 分)

1. A; 2. B; 3. C; 4. C; 5. A; 6. D; 7. B; 8. D

二、选择题：(每小题 6 分，共 18 分)

9. AD; 10. ABD; 11. BCD

三、填空题：(每小题 5 分，共 15 分)

12. 10; 13. $[1, +\infty)$; 14. $2, \frac{16}{729}$.

四、解答题：(共 77 分)

15. 解：(1) 连结 BD 交 AC 于点 E ，连结 D_1B_1, D_1E .因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 E 是 BD 的中点.又 $DC=2D_1C_1$ ，所以 $DB=2D_1B_1$ ，故 $EB=D_1B_1$.

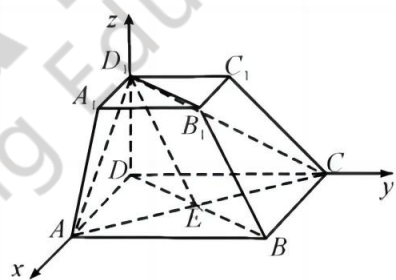
.....2 分

由棱台的定义， DD_1 与 BB_1 共面，因为棱台的上、下底面平行，所以它们与平面 BDD_1B_1 的交线平行，即 $D_1B_1 \parallel DB$.

.....4 分

所以四边形 EBB_1D_1 为平行四边形，故 $BB_1 \parallel ED_1$.

.....5 分

又因为 $BB_1 \not\subset$ 平面 ACD_1 ， $ED_1 \subset$ 平面 ACD_1 ，所以 $BB_1 \parallel$ 平面 ACD_16 分(2) 以 D 为原点，分别以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. 则 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), C_1(0,1,1), D_1(0,0,1)$.故 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0), \overrightarrow{AD_1}=(-2,0,1), \overrightarrow{CB}=(2,0,0), \overrightarrow{CC_1}=(0,-1,1)$7 分设平面 ACD_1 的法向量 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$ ，由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC}=0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AD_1}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=y_1, \\ 2x_1=z_1. \end{cases}$ 取 $x_1=1$ ，得平面 ACD_1 的一个法向量 $\mathbf{m}=(1,1,2)$9 分设平面 BCC_1D_1 的法向量 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2)$ ，由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CC_1}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_2=0, \\ y_2=z_2. \end{cases}$ 取 $y_2=1$ ，得平面 BCC_1D_1 的一个法向量 $\mathbf{n}=(0,1,1)$11 分故 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1+2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$12 分所以平面 ACD_1 与平面 BCC_1D_1 夹角的大小为 $\frac{\pi}{6}$13 分

16. 解：(1) $X=1, 2, 3$.

.....1 分

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};$$

.....2 分

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5};$$

.....3 分

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

.....4 分

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

.....5 分

故随机变量 X 的期望 $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$.

.....7 分

所以 X 的方差 $D(X) = (1-2)^2 \times \frac{1}{5} + (2-2)^2 \times \frac{3}{5} + (3-2)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

.....8 分

【或解：因为 $E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{22}{5}$.

所以 X 的方差 $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5}$.】

(2) 设事件 A_i = “选手甲抽到 i 道会做的题目, $i=1, 2, 3$ ”, 事件 B = “选手甲通过预赛”, 则 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, A_1, A_2, A_3 两两互斥, $B = A_1 B + A_2 B + A_3 B$.

由(1)知, $P(A_1) = \frac{1}{5}$. 又 $P(B|A_1) = 1 \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

所以 $P(A_1 B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

.....10 分

同理, $P(A_2 B) = P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \frac{3}{5} \times 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

.....12 分

$P(A_3 B) = P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{1}{5} \times 1^3 = \frac{1}{5}$.

.....14 分

由全概率公式得, 选手甲通过预赛的概率 $P(B) = \frac{1}{20} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$.

.....15 分

17. 解：(1) 令 $n=1$, 得 $3S_1 = a_2$. 又 $a_2 = 6$, 所以 $S_1 = 2$.

.....1 分

$S_2 = S_1 + a_2 = 2 + 6 = 8$.

.....2 分

令 $n=2$, 得 $4S_2 = 2a_3$. 又 $S_2 = 8$, 所以 $a_3 = 16$.

.....3 分

故 $S_3 = S_2 + a_3 = 8 + 16 = 24$.

.....4 分

(2) 若选择①：由已知, 得 $(n+2)S_n = n(S_{n+1} - S_n)$.

.....5 分

故 $2(n+1)S_n = nS_{n+1}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} = 2 \times \frac{S_n}{n}, n \in \mathbf{N}^*$.

.....7 分

故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项和公比均为 2 的等比数列.

.....9 分

若选择②:由已知, $S_n = \frac{n}{n+2}a_{n+1}$. 故当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{n-1}{n+1}a_n$5 分

两式相减,得 $a_n = \frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{n-1}{n+1}a_n$.

化简并整理,得 $\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{2a_n}{n+1}$ ($n \geq 2$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$).7 分

又 $\frac{a_1}{2} = 1, \frac{a_2}{3} = 2$, 所以 $\frac{a_2}{3} = 2 \times \frac{a_1}{2}$8 分

故 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比等比数列.9 分

(3) 若选择①:由(2)知, $\frac{S_n}{n} = 2^n$, 故 $S_n = n \cdot 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).11 分

若选择②:由(2)知, $\frac{a_n}{n+1} = 2^{n-1}$, 故 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).10 分

所以 $S_n = \frac{n}{n+2}a_{n+1} = n \cdot 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).11 分

所以 $T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$.

则 $2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$.

两式错位相减,得 $-T_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$ 13 分

$$= 2(2^n - 1) - n \cdot 2^{n+1} = (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2.$$

所以 $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$, $n \in \mathbf{N}^*$15 分

18. 解:(1)由题意,直线 l 不与 x 轴重合,设 l 的方程 $x = ty - 1$.

代入 $y^2 = 4x$, 并整理得 $y^2 - 4ty + 4 = 0$2 分

由 $\Delta = 16t^2 - 16 > 0$, 得 $t < -1$ 或 $t > 1$.

设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = 4$3 分

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} + y_1 y_2 = 1 + 4 = 5$5 分

(2)由弦长公式,得 $|AB| = \sqrt{1+t^2} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{(1+t^2)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]}$ 6 分

$$= 4\sqrt{t^4 - 1}.$$

线段 AB 的中点到 y 轴的距离 $r = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

又 $x_i = ty_i - 1$ ($i = 1, 2$), 故 $r = \frac{t}{2}(y_1 + y_2) - 1 = 2t^2 - 1$8 分

由 $|AB| = 2r$, 得 $4\sqrt{t^4 - 1} = 4t^2 - 2$, 解得 $t = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ (均满足 $\Delta > 0$).

所以直线 l 的方程为 $2x \pm \sqrt{5}y + 2 = 0$10 分

②设点 $M(\frac{y_3^2}{4}, y_3)$ ($y_3 \neq -y_1$), $N(\frac{y_4^2}{4}, y_4)$, 同理可得 $y_3 y_4 = 4$11 分

又直线 BN 的斜率 $k_1 = \frac{4(y_2 - y_4)}{y_2^2 - y_4^2} = \frac{4}{y_2 + y_4}$.

由 $y_2 = \frac{4}{y_1}, y_4 = \frac{4}{y_3}$, 得 $k_1 = \frac{y_1 y_3}{y_1 + y_3}$13 分

设点 $Q(0, m)$, 由 A, M, Q 三点共线, 得 $\frac{y_1^3}{4}(y_3 - m) = \frac{y_3^3}{4}(y_1 - m)$.

化简,得 $m = \frac{y_1 y_3}{y_1 + y_3}$15 分

又直线 PQ 的斜率 $k_2 = \frac{0-m}{-1-0} = m$, 故 $k_1 = k_2$.

所以 $BN \parallel PQ$, 故 $\triangle PBN$ 与 $\triangle QBN$ 的面积相等.17 分

19. 解: (1) 由 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, 得 $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$2 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增; 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.3 分

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(1) = \frac{1}{e}$; 无极小值.4 分

(2) 由题意, $k(2x+1) \geq f(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $k(2x+1) \geq f(x)$ 显然成立; 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, 由 $k(2x+1) \geq f(x)$,

得 $k \leq \frac{x}{(2x+1)e^x}$; 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, 由 $k(2x+1) \geq f(x)$, 得 $k \geq \frac{x}{(2x+1)e^x}$5 分

设函数 $h(x) = \frac{x}{(2x+1)e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{(2x+1)-x(2x+3)}{(2x+1)^2 e^x} = \frac{(x+1)(1-2x)}{(2x+1)^2 e^x}$6 分

当 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 且 $x \neq -\frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

在 $(-1, -\frac{1}{2})$ 和 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上单调递增.7 分

所以当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $h(x)_{\min} = g(-1) = e$;8 分

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $h(x)_{\max} = h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{4e}$9 分

所以 k 的取值范围是 $[\frac{\sqrt{e}}{4e}, e]$10 分

(3) 由 (2) 知, $e(2x+1) \geq f(x)$, 故 $(2x+1)e^{x+1} \geq x (x \in \mathbf{R})$.

令 $x = \ln \frac{j+2}{j+1} - 1 (j \in \mathbf{N}^*)$, 得 $(2\ln \frac{j+2}{j+1} - 1) \frac{j+2}{j+1} \geq \ln \frac{j+2}{j+1} - 1$.

化简并整理, 得 $\frac{j+3}{j+1} \ln \frac{j+2}{j+1} \geq \frac{1}{j+1}$, 故 $(j+3) \ln \frac{j+2}{j+1} \geq 1$12 分

所以 $(j+3) \ln(j+2) - (j+2) \ln(j+1) \geq 1 + \ln(j+1)$13 分

累加, 得 $\sum_{j=1}^{i-1} [(j+3) \ln(j+2) - (j+2) \ln(j+1)] \geq \sum_{j=1}^{i-1} [1 + \ln(j+1)] (i \geq 2, \text{ 且 } i \in \mathbf{N}^*)$.

所以 $(i+2) \ln(i+1) - 3 \ln 2 \geq (i-1) + \ln(i!)$, 故 $\ln \frac{(i+1)^{i+2}}{8} \geq \ln(i! \cdot e^{i-1})$.

.....14 分

所以 $\frac{(i+1)^{i+2}}{8} \geq i! \cdot e^{i-1}$, 故 $\frac{i!}{(i+1)^{i+2}} \leq \frac{1}{8e^{i-1}}$ (当 $i=1$ 时也成立).15 分

所以 $\sum_{i=1}^n \frac{i!}{(i+1)^{i+2}} \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e^{i-1}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1-\frac{1}{e}} (1-\frac{1}{e^n}) < \frac{1}{8} \times \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{8(e-1)} (n \in \mathbf{N}^*)$.

.....17 分