2025 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 12 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $M=\{x\mid 2x-1>5\},N=\{1,2,3\}$，则 $M\cap N=$（　）

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z+2=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 8

3. 双曲线 $x^2-4y^2=4$ 的离心率为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\dfrac{5}{4}$　　D. $\sqrt{5}$

4. 为了得到函数 $y=9^x$ 的图象，只需把函数 $y=3^x$ 的图象上所有点的（　）

A. 横坐标变为原来 $\dfrac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变）　　B. 横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变）

C. 纵坐标变为原来的 $\dfrac{1}{3}$ 倍（横坐标不变）　　D. 纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变）

5. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，$a_1=-2$，若 a_3,a_4,a_6 成等比数列，则 $a_{10}=$（　）

A. -20　　B. -18　　C. 16　　D. 18

6. 已知 $a>0,b>0$，则（　）

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　　D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则“$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$”是“对任意 $M\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in D$，使得 $\left|f\left(x_0\right)\right|>M$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 设函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$，若 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立，且 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点，则 ω 的最小值为（　）

A　8　　B. 6　　C. 4　　D. 3

9. 一定条件下，某人工智能大语言模型训练 N 个单位　数据量所需要的时间 $T=k\log_2 N$（单位：h），其中 k 为常数. 在此条件下，已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时，训练时间增加 20h；当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时，训练时间增加（　）

A. 2h　　B. 4h　　C. 20h　　D. 40h

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$. 设 $C(3,4)$，则 $|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是（　）

A. $[6,14]$　　B. $[6,12]$　　C. $[8,14]$　　D. $[8,12]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

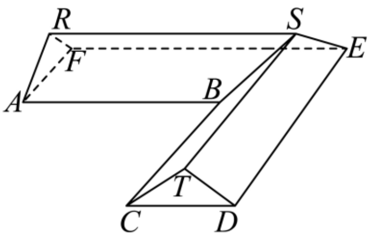
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的顶点到焦点的距离为 3，则 $p=$_______.

12. 已知 $(1-2x)^4=a_0-2a_1x+4a_2x^2-8a_3x^3+16a_4x^4$，则 $a_0=$_______；$a_1+a_2+a_3+a_4=$_______.

13. 已知 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos(\alpha-\beta)$. 写出满足条件的一组 α,β 的值 $\alpha=$_______，$\beta=$_______.

14. 某科技兴趣小组用 3D 打印机制作的一个零件可以抽象为如图所示的多面体，其中 $ABCDEF$ 是一个平面多边形，平面 $AFR\perp$ 平面 ABC，平面 $CDT\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$AB//EF//RS//CD$，$BC//DE//ST//AF$. 若 $AB=BC=8, AF=CD=4, RA=RF=TC=TD=\frac{5}{2}$，则该多面体的体积为_______.



15. 关于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$，给出下列四个结论：

①存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立；

②存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)-f(2x)=x$ 恒成立；

③使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个；

④使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个.

其中正确结论　序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=-\dfrac{1}{3}, a\sin C=4\sqrt{2}$.

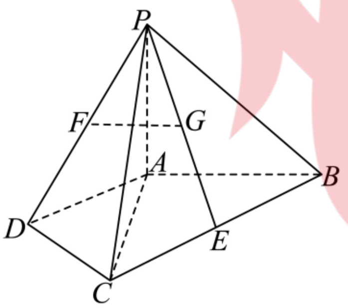
（1）求 c 的值；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在，求 BC 边上的高.

条件①：$a=6$；条件②：$a\sin B=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$；条件③：$\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{2}$.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle ADC$ 与 $\triangle BAC$ 均为等腰直角三角形，

$\angle ADC=90°$，$\angle BAC=90°$，E 为 BC 的中点.



（1）若 F, G 分别为 PD, PE 的中点，求证：$FG//$ 平面 PAB；

（2）若 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AC$，求直线 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值.

18. 某次考试中，只有一道单项选择题考查了某个知识点，甲、乙两校的高一年级学生都参加了这次考试. 为了解学生对该知识点的掌握情况，随机抽查了甲、乙两校高一年级各 100 名学生该题的答题数据，其中甲

校学生选择正确的人数为 80，乙校学生选择正确的人数为 75. 假设学生之间答题相互独立，用频率估计概率.

（1）估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率 p

（2）从甲、乙两校高一年级学生中各随机抽取 1 名，设 X 为这 2 名学生中该题选择正确的人数，估计 $X=1$ 的概率及 X 的数学期望；

（3）假设：如果没有掌握该知识点，学生就从题目给出的四个选项中随机选择一个作为答案；如果掌握该知识点，甲校学生选择正确的概率为 100%，乙校学生选择正确的概率为 85%. 设甲、乙两校高一年级学生掌握该知识点的概率估计值分别为 p_1，p_2，判断 p_1 与 p_2 的大小（结论不要求证明）.

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 E 上的点到两焦点的距离之和为 4.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，点 $M(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 在椭圆 E 上，直线 $x_0x+2y_0y-4=0$ 与直线 $y=2$，$y=-2$ 分别交于点 A，B. 设 $\triangle OAM$ 与□OBM 的面积分别为 S_1,S_2，比较 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 与 $\dfrac{|OA|}{|OB|}$ 的大小.

20. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$, $f(0)=0$，导函数 $f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$，设 l_1 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(a,f(a))(a\neq 0)$ 处的切线.

（1）求 $f'(x)$　最大值；

（2）当 $-1<a<0$ 时，证明：除切点 A 外，曲线 $y=f(x)$ 在直线 l_1 的上方；

（3）设过点 A 的直线 l_2 与直线 l_1 垂直，l_1，l_2 与 x 轴交点的横坐标分别是 x_1，x_2，若 $a>0$，求 $\dfrac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}$ 的取值范围.

21. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, M=\{(x,y)\mid x\in A, y\in A\}$，从 M 中选取 n 个不同的元素组成一个序列：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$，其中 (x_i,y_i) 称为该序列的第 i 项 $(i=1,2,\ldots,n)$，若该序列的相邻项 $(x_i,y_i),(x_{i+1},y_{i+1})$ 满足：$\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=3,\\|y_{i+1}-y_i|=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=4,\\|y_{i+1}-y_i|=3\end{cases}$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$，则称该序列为 K 列.

（1）对于第 1 项为 $(3,3)$ 的 K 列，写出它的第 2 项.

（2）设Γ为K列，且Γ中的项$\left(x_i, y_i\right)(i=1,2,\ldots,n)$满足：当$i$为奇数时，$x_i \in\{1,2,7,8\}$；当$i$为偶数时，$x_i \in\{3,4,5,6\}$.判断$(3,2)$，$(4,4)$能否同时为$\Gamma$中的项，并说明理由；

（3）证明：由M的全部元素组成的序列都不是K列.