

2025 年 6 月

绵阳南山中学 2025 年春季高二期末热身考试

数学试题

命题: 文红苹 审题: 刘国松

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. $(\frac{1}{x} - x)^8$ 的展开式中常数项是

- A. 70 B. 36 C. 28 D. 45

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = 8$, $a_2 = 18$, 则 $a_4 =$

- A. 36 B. ± 6 C. -6 D. 6

3. 今年 5 月, 绵阳南山中学以 86:66 战胜宜宾一中, 蝉联贡嘎杯四川省总冠军。南山中学在一次调查“篮球迷”的活动中, 获得了如下数据: 以下结论正确的是

	男生	女生
篮球迷	30	15
非篮球迷	45	10

P	0.10	0.05	0.01
k	2.706	3.841	6.635

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

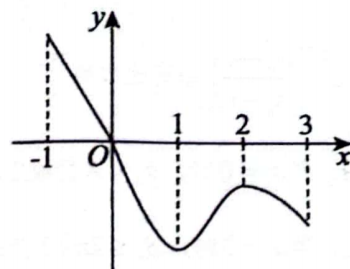
- A. 有 90% 的把握认为是否是篮球迷与性别有关
- B. 有 99% 的把握认为是否是篮球迷与性别有关
- C. 在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下, 可以认为是否是篮球迷与性别有关
- D. 在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下, 可以认为是否是篮球迷与性别有关
4. 近年来, 国内中、短途旅游人数增长显著, 2025 年上半年旅游人数更创新高, 充分展示了国内文旅消费潜力. 绵阳南山中学高二 1 班甲、乙、丙、丁四位同学打算去自贡、成都、眉山三个地方旅游, 每位同学只去一个地方, 每个地方至少去 1 人, 则甲、乙都去自贡的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{18}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{1}{72}$

5. 定义在 $[-1, 3]$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论正确的个数是

①函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减; ②函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减;

③函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值; ④函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.



- A. 4 个 B. 3 个
C. 2 个 D. 1 个

6. 国际高峰论坛上, 组委会要从 6 个国内媒体团和 3 个国外媒体团中选出 3 个媒体团进行提问, 要求这 3 个媒体团中既有国内媒体团又有国外媒体团, 且国外媒体团不能连续提问, 则不同的提问方式的种数为

- A. 306 B. 198 C. 268 D. 378

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^x + 1}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 2, a_{n+4} = a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, $f(a_2 + a_3) + f(a_4 + a_5) = 0$,

则 $\sum_{i=1}^{2025} a_i =$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 若曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 与 $y = e^x$, 恰有 2 条公切线, 则 $k =$

- A. $-\frac{1}{\sqrt{e}}$ B. $-\frac{1}{e}$ C. $-\frac{1}{e^2}$ D. -1

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 以下说法正确的是

- A. 若 $E(X) = 2, D(X) = 1$, 则 $E(2X+1) = 5, D(2X+1) = 2$
B. 相关系数 r 用来衡量成对样本数据的线性相关程度, 而决定系数 R^2 可以用来比较两个模型的拟合效果
C. 已知随机变量 $X \sim B(n, \frac{1}{3})$, 若 $E(X) = 1$, 则 $P(X=2) = \frac{2}{9}$
D. 某校高二年级的男生身高 X (单位: cm) 近似服从正态分布 $N(170, 5^2)$. 若该校高二年级有 1000 名男生, 则身高在 $[165, 180]$ 内的男生大约有 819 人 (参考数据: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$.)

10. 设 A, B 为一个随机试验中的两个事件, 且 $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}|B) = \frac{3}{4}, P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{3}{8}$, 则

- A. $P(A+B) = \frac{3}{4}$ B. $P(B) = \frac{1}{4}$ C. $P(\bar{B}|A) = \frac{5}{6}$ D. $P(AB) = \frac{1}{6}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足首项 $a_1 (a_1 \neq 4, a_1 \neq 0)$, $5a_{n+1} - a_{n+1}a_n - 4 = 0$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 下列说法正确的有

A. $\left\{\frac{a_n-4}{a_n-1}\right\}$ 是等比数列

B. 当 $a_1=0$ 时, $a_n < \lambda$ 恒成立, 则 $\lambda > 1$

C. 当 $a_1=3$ 时, $S_n \leq 2n+1$ 恒成立

D. 当 $a_1=6$ 时, 数列 $\left\{a_n - \frac{9}{10}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 取最小值时, $n=4$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 某种产品的广告支出费用 x (单位: 万元) 与销售量 y (单位: 万件) 之间的对应数据如下表,

广告支出费用 x /万元	1	3	4	5	7
销售量 y /万件	2.1	3.1	3.5	4.1	5.2

已知 $\hat{y} = 0.5x + 1.6$, 则 $x=7$ 时, 残差为_____.

13. 已知 $(x+1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$, 则 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10} =$ _____.

14. 函数 $f(x) = ax \ln x - 2 \ln x - abx + 2b$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $a(b+2)$ 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 随着“一带一路”的发展, 中国同某国贸易频繁, 现统计近 5 年两国交易额(单位: 百亿元), 结果见表:

年份	2020	2021	2022	2023	2024
年份代码 x	1	2	3	4	5
交易额 y	9	12	17	21	26

(1) 统计学中常用线性相关系数 r 来衡量两个变量 y

与 x 之间线性关系的强弱. 一般认为: 若

$r \in [-1, -0.75]$, 则负相关性很强; 若 $r \in [0.75, 1]$, 则正相关性很强; 若 $r \in (-0.75, -0.30] \cup [0.30, 0.75)$, 则相

关性一般; 若 $r \in (-0.3, 0.3)$, 则相关性很弱. 请用表中数据计算出 r , 并说明 y 与 x 的线性相关程度.

(2) 求出 y 关于 x 的线性回归方程, 并预测 2025 年两国的交易额.

参考数据: $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 43$; $\sqrt{465} \approx 21.6$

参考公式: $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$; 回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

16. (15分) 已知三次函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ($b, c, d \in \mathbb{R}$) 过点 $(3, 0)$, 且函数 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线恰好是直线 $y = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 设函数 $g(x) = 9x + m - 1$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上有两个零点, 求实数 m 的取值范围.

17. (15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} + 3$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 证明数列 $\{a_n - 2^n\}$ 是等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求 b_n 的前 n 项和 S_n .

18. (17分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - 1$, $g(x) = ax^2 - (a-2)x$.

(1) 若 $m - 1 < f(x)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(2) 已知 $a < 0$, 设函数 $h(x) = f'(x) - g(x)$, 讨论 $h(x)$ 的单调性;

(3) 设函数 $G(x) = g(x) + (a-2)x$, 若函数 $f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两个不同的交点,

证明: $\ln(x_1 x_2) > 2 + \ln 2$.

19. (17分) 某驾校为让学员掌握交通安全法律法规, 开发了一个答题 APP, 学员每次从题库中随机抽取若干问题, 逐题依次作答, 答错得 0 分, 答对得 5 分; 若连续答对, 则从连续答对的第 2 题开始, 每题额外奖励 5 分, 记答题得分与奖励得分的和为 X . 已知学员甲答对每个问题的概率均为 $\frac{1}{3}$, 且每题答对与否互不影响.

(1) 在学员甲答了 4 题且答对 2 题前提下, 求得分为 10 的概率;

(2) 学员甲答了 3 题, 求 X 的分布列和数学期望;

(3) 学员甲答了 m 题 ($m \in \mathbb{N}^*$), 求 $P(X=15)$ 的表达式.

绵阳南山中学 2025 年春季高二期末热身考试

数学试题解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	D	A	B	C	A	A	B	BCD	AC	ACD

12. 0.1

13. 5120

14. $(-\infty, 2e]$

15. (1) 由题意, 根据表格中的数据, 可得: $\bar{x} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$, $\bar{y} = \frac{1}{5}(9+12+17+21+26) = 17$,

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{43}{43.2} \approx 0.995 \text{ 所以变量 } y \text{ 与 } x \text{ 的线性相关程度很强.}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } \bar{x} = 3, \bar{y} = 17, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 43, \text{ 所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{43}{10} = 4.3, \text{ 则}$$

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 17 - 4.3 \times 3 = 4.1$, 可得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 4.3x + 4.1$ 令 $x = 6$, 可得

$\hat{y} = 4.3 \times 6 + 4.1 = 29.9$, 即 2025 年两国的交易额 29.9 百亿元.

$$16. (1) f'(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx + c,$$

$$\text{由题意知: } \begin{cases} f(3) = 27 + 9b + 3c + d = 0 \\ f'(0) = c = 0 \\ f(0) = d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2; \text{ 由 } f(x) \text{ 定义域为 } \mathbf{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 2$

当 x 变化时, $f'(x)$ 、 $f(x)$ 变化如下:

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得大值 $f(0) = 0$,

当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得极小值

$$f(2) = -4;$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

$$(2) \text{ 令 } y = f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x + 1, h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1),$$

当 $x \in [-2, -1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $[-2, -1)$ 上单调递增, 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(-1, 1]$ 上单调

递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(-1) = 6$, $h(-2) = -1$, $h(1) = -10$ 因为函数 $y = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上有两个零

点, 所以直线 $y=m$ 与函数 $h(x)=x^3-3x^2-9x+1(x \in [-2,1])$ 的图象有两个交点,

故有 $-1 \leq m < 6$, 即实数 m 的取值范围为 $[-1,6)$.

17. (1) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} + 3 = a_{n-1} + 2^n - 2^{n-1} + 3$, 所以, $a_n - 2^n - (a_{n-1} - 2^{n-1}) = 3$,

又 $a_1 = 4$, 所以 $a_1 - 2 = 2$, 故 $\{a_n - 2^n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列, $a_n = 2^n + 3n - 1$.

(2) $b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{2^n + 3n - 1}{2^n} = 1 + \frac{3n-1}{2^n}$, 所以, $S_n = \left(1 + \frac{2}{2}\right) + \left(1 + \frac{5}{2^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{3n-1}{2^n}\right) = n + \left(\frac{2}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{3n-1}{2^n}\right)$,
令 $T_n = \frac{2}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{3n-1}{2^n}$, ① 则 $\frac{1}{2}T_n = \frac{2}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{3n-1}{2^{n+1}}$, ② ① - ② 得: $\frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{3}{2^n} - \frac{3n-1}{2^{n+1}}$,
 $= 1 + 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3n-1}{2^{n+1}} = \frac{5}{2} - \frac{3n+5}{2^{n+1}}$, 故 $T_n = 5 - \frac{3n+5}{2^n}$, 所以, $S_n = n + 5 - \frac{3n+5}{2^n}$.

18. (1) 易知 $f'(x) = \ln x + 1$ 令 $f'(x) > 0$, 得 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增;

令 $f'(x) < 0$, 得 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1$.

由 $m - 1 < f(x)$ 恒成立知, $m - 1 < f(x)_{\min} = -\frac{1}{e} - 1$, 故 $m < -\frac{1}{e}$.

(2) 由题知 $h(x) = f'(x) - g(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x + 1$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 所以

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) = \frac{-2ax^2 + (a-2)x + 1}{x} = \frac{(-2x+1)(x+1)}{x};$$

综上可知, 当 $a \geq 0$ 时, $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减;

当 $-2 < a < 0$ 时, $h(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增; $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减;

当 $a = -2$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < -2$ 时, $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增; 在 $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减;

(3) 显然 $G(x) = g(x) + (a-2)x = ax^2$, 因为函数 $f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有两个不同的交点.

所以关于 x 的方程 $ax^2 = x \ln x - 1$, 即 $ax = \ln x - \frac{1}{x}$ 有两个不同的根. 由题知 $ax_1 = \ln x_1 - \frac{1}{x_1}$ ①, $ax_2 = \ln x_2 - \frac{1}{x_2}$ ②,

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得 } a(x_1 + x_2) = \ln(x_1 x_2) - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \text{ ③, } \text{②} - \text{①} \text{ 得 } a(x_2 - x_1) = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \text{ ④,}$$

由 ③ ④ 得 $\ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 记 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$. 令 $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$ ($t > 1$),

则 $F'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t-1)} > 0$, 所以 $F(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F(t) > F(1) > 0$, 则 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, 即

$$\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > \frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}, \text{ 所以 } \ln(x_1x_2) - \frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_2-x_1} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 2.$$

因为 $\ln(x_1x_2) - \frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2} < \ln(x_1x_2) - \frac{4\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2} = 2\ln\sqrt{x_1x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$, (利用基本不等式时, $x_1 \neq x_2$, 故等号取不

到), 所以 $2\ln\sqrt{x_1x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1x_2}} > 2$, 即 $\ln\sqrt{x_1x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1x_2}} > 1$. 令 $\varphi(x) = \ln x - \frac{2}{x}$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $\ln\sqrt{2e} - \frac{2}{\sqrt{2e}} = \frac{1}{2}\ln 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{c} < 1$, 所以 $\ln\sqrt{x_1x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1x_2}} > 1 > \ln\sqrt{2e} - \frac{2}{\sqrt{2e}}$, 即 $\varphi(\sqrt{x_1x_2}) > \varphi(\sqrt{2e})$, 所以

$x_1x_2 > 2e^2$; 两边同时取对数可得 $\ln(x_1x_2) > 2 + \ln 2$, 得证.

19. (1) 设事件 A 为“学员甲答了 4 题且答对 2 题”, 事件 B 为“ $X=10$ ”,

则 $n(A) = C_4^2 = 6$, 事件 AB 共 3 种情形, 即答题情况为“对错对错”, “对错错对”, “错对错对”, 所以 $n(AB) = 3$,

$$\text{所以 } P(X=10) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(2) X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15, 25,

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

$$P(X=5) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27};$$

$$P(X=10) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27};$$

$$P(X=15) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27};$$

$$P(X=25) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	5	10	15	25
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{8}{27} + 5 \times \frac{12}{27} + 10 \times \frac{2}{27} + 15 \times \frac{4}{27} + 25 \times \frac{1}{27} = \frac{55}{9}.$$

(3) 情形一, 答对了 2 题, 且 2 题相邻;

情形二, 答对了 3 题, 且任意 2 题都不相邻.

当 $m=1$ 时, $P(X=15)=0$.

当 $m=2$ 时, 情形二不可能发生, $P(X=15) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

当 $m=3, 4$ 时, 情形二不可能发生, $P(X=15) = C_{m-1}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{m-2} = \frac{m-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m$.

当 $m \geq 5$ 时, 对情形一, 采用捆绑法, 所求事件发生的概率为 $C_{m-1}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{m-2} = \frac{m-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m$.

对情形二, 采用插空法, 将 $m-3$ 个答错的题排成一列, 共有 $m-2$ 个空位,

将答对的 3 题插入上述空位, 所求事件发生的概率为 $C_{m-2}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{m-3} = \frac{m^3 - 9m^2 + 26m - 24}{48} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m$.

$$\text{故 } P(X=15) = \frac{m-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m + \frac{m^3 - 9m^2 + 26m - 24}{48} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{m^3 - 9m^2 + 38m - 36}{48} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

$$\text{综上 } P(X=15) = \begin{cases} \frac{m-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m, & m=1, 2, 3, 4, \\ \frac{m^3 - 9m^2 + 38m - 36}{48} \times \left(\frac{2}{3}\right)^m, & m \geq 5, \text{ 且 } m \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$