成都石室中学2024-2025学年度下期高2026届零诊模拟考试

数学试题

（满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效.

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 在$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^4$的展开式中，$x^2$的系数等于（　　）

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

2．已知$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$a_1=-2$，若a_3,a_4,a_6成等比数列，则$a_{10}=$（　　）

A. -20　　B. -18　　C. 16　　D. 18

3. 已知m,n是两条不同的直线，α,β,γ是三个不同的平面，则下列结论正确的是（　　）

A. 若$m\parallel n$，$m\parallel\alpha$，则$n\parallel\alpha$　　B. 若$m\parallel n$，$\alpha\parallel\beta$，$m\perp\alpha$，则$n\perp\beta$

C. 若$\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha\parallel\beta$　　D. 若$\alpha\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$m\parallel n$

4. 已知公比为正数的等比数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，且$S_2=1$，$S_4=5$，则$a_1=$（　　）

A. -1或$\frac{1}{3}$　　B. -1　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

5. 已知椭圆E：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，点$F(-1,0)$，若直线$x+\lambda y-1=0$（$\lambda\in\mathbf{R}$）与椭圆$E$交于$A,B$两点，则$\triangle ABF$的周长为（　　）

A. 8　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

6. 当$x=1$是函数$f(x)=\left(x^2+2ax-a^2-3a+3\right)e^x$的极值点，则$a$的值为（　　）

A. 3　　B. -2　　C. 3或-2　　D. 2或-3

7. 已知随机变量ξ,η满足$2\xi+\eta=4$，且$\xi\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，则下列说法正确的是（　　）

A. $P(\xi=2)=P(\xi=4)$　　B. $E(\eta)=1$

C. $D(\eta)=\frac{8}{3}$　　D. $E\left(\xi^2\right)=\frac{16}{3}$

8. 将$1,2,3,4,5,6,7$适当排列成$a_1,a_2,\cdots,a_7$，满足$a_1<a_2<a_3>a_4>a_5<a_6<a_7$，则满足要求的排列的个数为（　　）

A. 58　　B. 71　　C. 85　　D. 96

二、选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9．食物盲盒是当下店家掀起的“外卖热”，现有编号依次为$1,2,3$的三个食物格子，其中1号格子装有2个汉堡和3个鸡腿，2号格子装有3个汉堡和2个鸡腿，3号格子中有5个汉堡.已知汉堡完全一样，鸡腿也完全一样.已知店员任意选择食物格子的概率是相同的，若店员在一份外卖中装入2个汉堡的记为事件A，装入2个鸡腿记为事件B，装入1个鸡腿，1个汉堡记为事件C，事件D_i（$i=1,2,3$）表示食物取自i号格子，下列选项正确的是（　　）

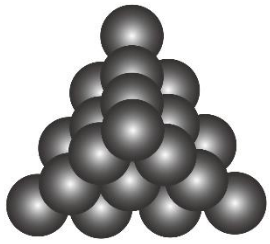
A. $P(A|D_1)=\frac{1}{5}$　　B. $P(B)=\frac{2}{15}$　　C. $P(C)=\frac{3}{4}$　　D. $P(C|D_3)=0$

10. 已知三次函数 $f(x)=x^3+bx^2+5(b<0)$ 有极小值点 $x=2$，则下列说法中正确的有（　）

A. $b=-3$　　　　B. 函数 $f(x)$ 有三个零点

C. 函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(1,3)$　　　　D. 过 $(-1,1)$ 可以作两条直线与 $y=f(x)$ 的图象相切

11. 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”.“三角垛”最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，…，设第 n 层有 a_n 个球，从上往下 n 层球的总数为 S_n，则（　）



A. $S_4=20$　　　　B. $a_{n+1}-a_n=n$

C. $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　　　　D. $a_n\ge\ln(n!)+n$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分. 把答案填在答题卡的横线上.

12. 已知随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P(X\ge -1)=0.8$，$P(2\le X\le m)=0.3$，则实数 $m=$______.

13. 有 5 本不同的书，全部借给 3 人，每人至少 1 本，共有______种不同的借法.（用数字回答）

14．若 $e^x+x-1\ge 2ax+\ln(2ax+1)$ 恒成立，则实数 $a=$______.

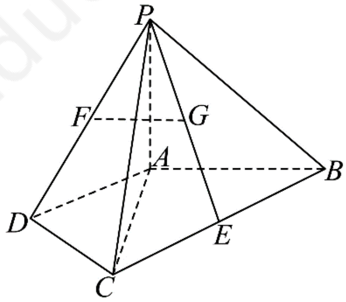
四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle ADC=90°$，$\angle BAC=90°$，E 为 BC 的中点.

(1) F 为 PD 的中点，G 为 PE 的中点，证明：$FG\parallel$ 平面 PAB；

(2)若 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AC$，求 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



16.（本小题满分 15 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=a_n\log_3 a_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17.（本小题满分 15 分）

已知编号为甲、乙、丙的三个袋子中装有除标号外完全相同的小球，其中甲袋内装有两个 1 号球，一个 2 号球和一个 3 号球；乙袋内装有两个 1 号球，一个 3 号球；丙袋内装有三个 1 号球，两个 2 号球和一个 3 号球.

（1）从甲袋中一次性摸出 2 个小球，记随机变量 X 为 1 号球的个数，求 X 的分布列和数学期望；

（2）现按照如下规则摸球：连续摸球两次，第一次先从甲袋中随机摸出 1 个球，若摸出的是 1 号球放入甲袋，摸出的是 2 号球放入乙袋，摸出的是 3 号球放入丙袋；第二次从放入球的袋子中再随机摸出 1 个球.求第二次摸到的是 3 号球的概率.

18.（本小题满分 17 分）

已知双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，F_1, F_2 分别是其左、右焦点，直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点.

（1）当直线 l 过点 F_2，且 $|AB|=6$ 时，求 $\triangle ABF_1$ 的周长；

（2）已知点 $N(-2,3)$，若直线 AN, BN 的斜率之和为 0，且 $\tan\angle ANB=\dfrac{4}{3}$，当 AN, BN 分别与 y 轴交于点 R, S 时，求 $\triangle RSN$ 的面积；

（3）已知直线 l 过点 F_2，P 是双曲线 C 上一点且位于第一象限，且满足 $\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$ 的点 Q 在线段 AB 上，若 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{QF_2}$，求点 P 的坐标.

19.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\left(x+k\right)\ln x$，$g\left(x\right)=x+a\sin x+b\ln x$.

（1）若 $k=1$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)>2\left(x-1\right)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围；

（3）设 $0<a<1$，$b<0$，若存在 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，使得 $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)\left(x_1\neq x_2\right)$. 证明：$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\dfrac{2\sqrt{-b}}{\sqrt{a}+1}$.

成都石室中学 2024-2025 学年度下期高 2026 届零诊模拟考试

数学答案

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 【答案】D

【解析】由题设，二项式展开式通项为 $T_{r+1}=C_4^r(x^2)^{4-r}(\dfrac{2}{x})^r=2^rC_4^rx^{8-3r}$， $r=0,1,\cdots,4$，

令 $8-3r=2\Rightarrow r=2$，则 $T_3=2^2C_4^2x^2=24x^2$，即 x^2 的系数等于 24.

2.【答案】C

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d,(d\neq 0)$，

因为 a_3,a_4,a_6 成等比数列，且 $a_1=-2$，

所以 $a_4^2=a_3a_6$，即 $(-2+3d)^2=(-2+2d)(-2+5d)$，解得 $d=2$ 或 $d=0$ （舍去），

所以 $a_{10}=a_1+9d=-2+9\times 2=16$.

3. 【答案】B

【解析】A.若 $m//n$， $m//\alpha$，则 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，故 A 错误；

B. 若 $m//n$， $\alpha//\beta$， $m\perp\alpha$，则 $n\perp\beta$，故 B 正确；

C. 若 $\alpha\perp\beta$， $\beta\perp\gamma$，则 $\alpha//\beta$ 或 α 与 β 相交，故 C 错误；

D. 若 $\alpha//\beta$， $m\subset\alpha$， $n\subset\beta$，则 $m//n$ 或异面，故 D 错误.

4. 【答案】C

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$，

因为 $S_2=1$， $S_4=5$，且 $q\neq 1$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}=1\\ \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{3}\\ q=2\end{cases}$，所以 $a_1=\dfrac{1}{3}$.

5.【答案】A

【解析】椭圆 E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的长半轴长 $a=2$，半焦距 $c=\sqrt{4-3}=1$，

则点 $F(-1,0)$ 为椭圆的左焦点，其右焦点为 $(1,0)$，而直线 $AB:x+\lambda y-1=0$ 恒过定点 $(1,0)$，

所以 $\triangle ABF$ 的周长为 $4a=8$.

6. 【答案】A

【解析】由 $f(x)=(x^2+2ax-a^2-3a+3)e^x$，

得 $f'(x)=(x^2+2ax+2x-a^2-a+3)e^x$，

$\because x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，

$\therefore f'(1)=0$， $6+a-a^2=0$，解得 $a=3$ 或 $a=-2$，

当 $a=-2$ 时， $f'(x)=(x^2-2x+1)e^x\geq 0$ 恒成立，即 $f(x)$ 单增，无极值点，舍去；

当 $a=3$ 时，$f'(x)=(x-1)(x+9)e^x$ 时，满足 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极值点，$\therefore a=3$.

7. 【答案】D

【解析】因为随机变量 ξ,η，满足 $2\xi+\eta=4$，且 $\xi\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，所以

对于 A，$P(\xi=4)=C_6^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{60}{729},P(\xi=2)=C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{240}{729}$，所以 A 不正确；

对于 B，$\xi\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，$E(\xi)=6\times\frac{1}{3}=2$，

$E(\eta)=E(4-2\xi)=4-2E(\xi)=4-2\times2=0$，所以 B 不正确；

对于 C，$\xi\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，$D(\xi)=6\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，

$D(\eta)=D(4-2\xi)=2^2D(\xi)=4\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$，所以 C 不正确；

根据 $D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2$,由 $E(\xi)=2,D(\xi)=\frac{4}{3}$,则 $\frac{4}{3}=E(\xi^2)-2^2$，$E(\xi^2)=\frac{16}{3}$

8.【答案】B

【解析】根据题意，a_3,a_4,a_6,a_7 都比 a_5 大，所以 a_5 可能取 $1,2$ 或 3，

当 $a_5=1$ 时，a_6,a_7 有 C_6^2 种选法，剩余数字中 a_3 最大，

a_1,a_2 有 C_3^2 种选法，最后剩下一个就是 a_4，共有 $C_6^2C_3^2=15\times3=45$ 种，

当 $a_5=2$ 时，$a_1=1$，a_6,a_7 有 C_5^2 种选法，剩余数字中 a_3 最大，

而 a_2，a_4 有 A_2^2 种选法，共有 $C_5^2A_2^2=10\times2=20$ 种，

当 $a_5=3$ 时，$a_1=1$，$a_2=2$，a_6,a_7 有 C_4^2 种选法，

剩余数字 a_3，a_4 只有 1 种，共有 $C_4^2=6$ 种，

则满足要求的排列的个数为 $45+20+6=71$ 种.

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.【答案】BD

【解析】对于 A，$P(A|D_1)=\frac{P(AD_1)}{P(D_1)}=\frac{1}{10}$,故 A 错误，

对于 B，$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{0}{C_5^2}=\frac{2}{15}$,故 B 正确，

对于 C，$P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{0}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，故 C 错误，

对于 D,由于 $P(CD_3)=0$,故 $P(C|D_3)=0$，D 正确

10. 【答案】ACD

【解析】$f'(x)=3x^2+2bx$，

因为函数 $f(x)=x^3+bx^2+5(b<0)$ 有极小值点 $x=2$，

所以 $f'(2)=12+4b=0$，解得 $b=-3$，

所以 $f(x)=x^3-3x^2+5$，$f'(x)=3x^2-6x$，

当 $x>2$ 或 $x<0$ 时，$f¢(x)>0$，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{极大值}=f(0)=5, f(x)_{极小值}=f(2)=1$，

又 $f(-2)=-15$，所以函数 $f(x)$ 仅有1个在区间 $(-2,0)$ 上的零点，故 A 正确，故 B 错误；

对于 C，由 $f(x)=x^3-3x^2+5=x^2(x-3)+5$，

得 $f(1+x)+f(1-x)=(1+x)^2(1+x-3)+5+(1-x)^2(1-x-3)+5=6$，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $(1,3)$ 对称，故 C 正确；

对于 D，设切点为 $\left(x_0,x_0^3-3x_0^2+5\right)$，则 $f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$，

故切线方程为 $y-\left(x_0^3-3x_0^2+5\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)(x-x_0)$，

又过点 $(-1,1)$，所以 $1-\left(x_0^3-3x_0^2+5\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)(-1-x_0)$，

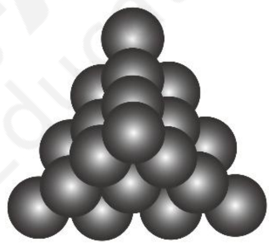
整理得 $x_0^3-3x_0-2=0$，即 $(x_0+1)^2(x_0-2)=0$，

解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=2$，所以过 $(-1,1)$ 可以作两条直线与 $y=f(x)$ 的图象相切，故 D 正确.

11. 【答案】ACD

【解析】由题意得 $a_1=1,a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,\cdots,a_n-a_{n-1}=n$，

以上格式累加，可得 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2},n\ge 2$，$a_1=1$ 也适合，



故 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则 $a_4=\dfrac{4\times5}{2}=10,S_4=1+3+6+10=20$，

对于选项 D，$\dfrac{n(n+1)}{2}\ge\ln(n!)+n$，整理得到 $\dfrac{n(n-1)}{2}\ge\ln(n!)$，即

$\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)\ge\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分. 把答案填在答题卡的横线上.

12. 【答案】5

【解析】因为 $P(X\ge -1)=0.8$，所以 $P(X\le -1)=0.2$，根据对称性可得 $P(X\ge 5)=0.2$，

又 $P(2\le X\le m)+P(X\ge 5)=0.5$，所以 $m=5$.

13. 【答案】150

【解析】将 5 本不同的书分成满足题意的 3 组有 1，1，3 与 2，2，1 两种，

分成 1、1、3 时，有 $C_5^3\ A_3^3$ 种分法，

分成 2、2、1 时，有 $\dfrac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\ A_3^3$ 种分法，

所以共有 $C_5^3\ A_3^3+\dfrac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\ A_3^3=150$ 种分法.

14. 【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】因为 $\mathrm{e}^x+x-1\ge 2ax+\ln(2ax+1)$ 恒成立，即 $\mathrm{e}^x+x\ge 2ax+1+\ln(2ax+1)$ 恒成立，

即 $\mathrm{e}^x+x\ge \mathrm{e}^{\ln(2ax+1)}+\ln(2ax+1)$ 恒成立，

设 $f(x)=\mathrm{e}^x+x$，则 $f(x)\ge f(\ln(2ax+1))$ 恒成立，

又 $f'(x)=\mathrm{e}^x+1>0$，则 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

可得 $x\ge\ln(2ax+1)$ 恒成立，即 $\mathrm{e}^x\ge 2ax+1$ 恒成立，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$，所以当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$，当 $x<0$ 时 $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以 $g(x)\ge g(0)=0$，

即 $e^x\ge x+1$ 恒成立（当且仅当 $x=0$ 时取等号），

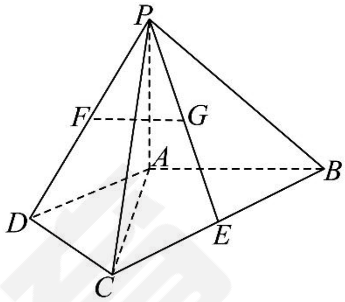
所以 $2a=1$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.【解析】（1）取 PA 的中点 N，PB 的中点 M，连接 FN、MN，

$\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形 $\angle ADC=90°$，$\angle BAC=90°$

不妨设 $AD=CD=2, \therefore AC=AB=2\sqrt{2}$



$\therefore BC=4$，$\because E$、F 分别为 BC、PD 的中点，$\therefore FN=\frac{1}{2}AD=1, BE=2$，

$\therefore GM=1$，

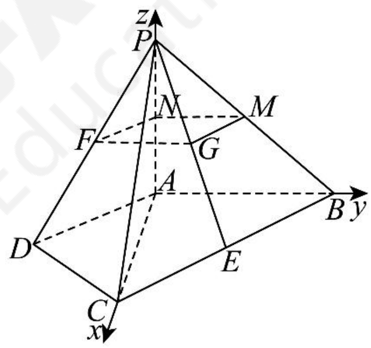
$\because \angle DAC=45°$，　$\angle ACB=45° \therefore AD\,/\!/\,BC$，…………………………2 分

$\therefore FN\,/\!/\,GM$，

∴四边形 $FGMN$ 为平行四边形，

$\therefore FG\,/\!/\,MN$，$\because FG\not\subset$ 面 PAB，$MN\subset$ 面 PAB，$\therefore FG\,/\!/$ 面 PAB；…………………………5 分

（2）$\because PA\perp$ 面 $ABCD$，$\therefore$ 以 A 为原点，AC、AB、AP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，…………………………7 分



设 $AD=CD=2$，则

$A(0,0,0), B(0,2\sqrt{2},0), C(2\sqrt{2},0,0) D(\sqrt{2},-\sqrt{2},0), P(0,0,2\sqrt{2})$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(0,2\sqrt{2},0)$，　$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，　$\overrightarrow{CP}=(-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$

设面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}, \therefore \begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\ -2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$

取 $x=1, \therefore y=-1, z=1, \therefore \vec{n}=(1,-1,1)$…………………………11 分

设 AB 与面 PCD 成的角为 θ

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|0\times1+2\sqrt{2}\times(-1)+0\times1|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

即 AB 与平面 PCD 成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.…………………………13 分

16. .【解析】（1）$\because a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$，①

∴当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1+1=2a_1+1=3$，　　…………………………2 分

当 $n\ge2$ 时，$a_n=2S_{n-1}+1$，②

①-②，得 $a_{n+1}-a_n=2S_n+1-2S_{n-1}-1=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$，

$\therefore a_{n+1}=3a_n$，　　又 $a_2=3a_1$，…………………………5 分

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，$\therefore a_n=3^{n-1}$.…………………………7 分

（2）由（1）知，$b_n=3^{n-1}\log_3 3^n=n\times3^{n-1}$，　　…………………………9 分

$\therefore T_n=1\times3^0+2\times3+3\times3^2+\cdots+n\times3^{n-1}$，③

$\therefore 3T_n=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+(n-1)\times3^{n-1}+n\times3^n$，④

③-④，得 $-2T_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n$

$=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n=\frac{(1-2n)\times3^n}{2}-\frac{1}{2}$，　　$\therefore T_n=\frac{(2n-1)\times3^n}{4}+\frac{1}{4}$.…………………………15 分

17.【解析】（1）由题意可知：随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，则有：

$P(X=0)=\dfrac{C_2^0C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6},P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3},P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_2^0}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$，…………………………6 分

可得随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

所以随机变量 X 的期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}=1$.…………………………8 分

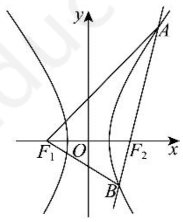
（2）记第一次从甲袋中随机摸出 1 个球，摸出的是 1、2、3 号球分别为事件 A_1,A_2,A_3，第二次摸到的是 3 号球为事件 B，

则 $P(A_1)=\dfrac{2}{4},P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{4},P(B\mid A_1)=\dfrac{1}{4},P(B\mid A_2)=\dfrac{1}{4},P(B\mid A_3)=\dfrac{2}{7}$，…………………………12 分

所以

$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{29}{112}$.…………………………15 分

18. 【解析】（1）根据双曲线定义得：$|AF_1|-|AF_2|=2$，$|BF_1|-|BF_2|=2$，



两式相加得 $|AF_1|+|BF_1|-(|AF_2|+|BF_2|)=4$，即 $|AF_1|+|BF_1|-|AB|=4$，

由已知 $|AB|=6$ 得 $|AF_1|+|BF_1|=10$，

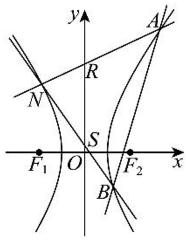
所以 $\triangle ABF_1$ 的周长为 16…………………………3 分

（2）设直线 AN,BN 的倾斜角分别为 α,β，

由已知 $k_{AN}+k_{BN}=0$ 得 $\alpha+\beta=\pi$，不妨设 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，则 $\angle ANB=2\alpha$，

则 $\tan\angle ANB=\tan 2\alpha=\dfrac{4}{3}$ 可求得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ 或 -2（舍），$\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$，…………………………5 分

所以直线 $AN:y-3=\dfrac{1}{2}(x+2)$ 解得 $R(0,4)$，



直线 $BN:y-3=-\dfrac{1}{2}(x+2)$ 解得 $S(0,2)$，

所以 $\triangle RSN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|RS|\cdot|x_N|=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$.…………………………8 分

（3）设 $P(x_0,y_0),(x_0>0,y_0>0)$，由 $\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$ 知 $Q(2x_0,2y_0)$，

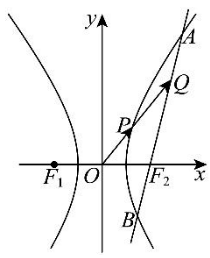
若直线 l 斜率不存在，则 $l:x=2$，此时 $P(1,0),Q(2,0)$ 与点 $F_2(2,0)$ 重合，不符题意，舍去；

设直线 l 方程为：$y=k(x-2)$，

与双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立化简得 $(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$，

$k^2-3\neq0,\Delta>0$，设交点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由韦达定理：$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3},x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}$，…………………………10 分



由 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{QF_2}$ 得 $\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)=2\left(2-2x_0,-2y_0\right)$，

从而 $x_2-x_1=2\left(2-2x_0\right)$，即 $(x_1-x_2)^2=16\left(x_0-1\right)^2$，

将韦达定理代入 $(\frac{4k^2}{k^2-3})^2-4\times\frac{4k^2+3}{k^2-3}=16(x_0-1)^2$

化简得 $9(k^2+1)=4(x_0-1)^2(k^2-3)^2$（※），…………………………12 分

因为 $k=k_{QF_2}=\frac{2y_0}{2x_0-2}=\frac{y_0}{x_0-1}$，即 $y_0=k(x_0-1)$，

由已知 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在双曲线上，得 $3{x_0}^2-{y_0}^2=3$，

从而 $3{x_0}^2-(k(x_0-1))^2=3$ 得 $k^2=\frac{3{x_0}^2-3}{(x_0-1)^2}=\frac{3(x_0+1)}{x_0-1}$ …………………………15 分

代入（※）式，$9(\frac{3x_0+3}{x_0-1}+1)=4(x_0-1)^2(\frac{3x_0+3}{x_0-1}-3)^2$，

化简得 $9\frac{4x_0+2}{x_0-1}=4(x_0-1)^2(\frac{6}{x_0-1})^2$，即 $9\frac{4x_0+2}{x_0-1}=4\times36$，

解得 $x_0=\frac{3}{2}$，此时 $y_0=\frac{\sqrt{15}}{2}$，$k=\sqrt{15}$ 满足题目要求.

点 P 的坐标为 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2})$.…………………………17 分

19. .【解析】(1) 当 $k=1$ 时，$f\left(x\right)=\left(x+1\right)\ln x$，$f'\left(x\right)=\ln x+\frac{\left(x+1\right)}{x}$

$\therefore f'\left(1\right)=2$，又 $\therefore f\left(1\right)=0$，$\therefore$ 切线方程为 $y=2x-2$；…………………………3 分

（2）设 $m\left(x\right)=f\left(x\right)-2\left(x-1\right)=\left(x+k\right)\ln x-2x+2$，

则 $m'\left(x\right)=\ln x+\frac{k}{x}-1$，$m''\left(x\right)=\frac{x-k}{x^2}$，

当 $k=1$ 时，$m\left(x\right)=\left(x+1\right)\ln x-2x+2$，

$m''\left(x\right)=\frac{x-1}{x^2}>0$，$m'\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $m'\left(x\right)>m'\left(1\right)=0$ 所以 $m\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $m\left(x\right)>m\left(1\right)=0$，所以 $k=1$ 符合题意；…………………………5 分

当 $k>1$ 时，令 $m''\left(x\right)=0$ 得 $x=k$，当 $x\in\left(1,k\right)$ 时，$m''\left(x\right)<0$，$m'\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(k,+\infty\right)$ 时，$m''\left(x\right)>0$，$m'\left(x\right)$ 单调递增；

所以 $m'\left(x\right)\geq m'\left(k\right)=\ln k>0$，即 $m'\left(x\right)>0$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上恒成立，

所以 $m\left(x\right)>m\left(1\right)=0$，所以 $k>1$ 符合题意；…………………………8 分

当 $k<1$ 时，$m''\left(x\right)>0$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上恒成立，$m'\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，又因为 $m'\left(1\right)=k-1<0$，

$m'\left(x\right)=\ln x+\frac{k}{x}-1>\ln x-\left|k\right|-1$，$m'\left(e^{1+\left|k\right|}\right)>0$，

所以存在 $x_0\in\left(1,e^{1+\left|k\right|}\right)$，使得 $m'\left(x_0\right)=0$，当 $x\in\left(1,x_0\right)$ 时，$m'\left(x\right)<0$，即 $m\left(x\right)$ 在 $\left(1,x_0\right)$ 上单调递减，

当 $x\in\left(1,x_0\right)$ 时，$m\left(x\right)<m\left(1\right)=0$

综上所述，实数k的取值范围是$\left[1,+\infty\right)$. ······························11 分

（3）设$x_1<x_2$，由$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，

可得$x_1+a\sin x_1+b\ln x_1=x_2+a\sin x_2+b\ln x_2$，

则$\left(x_2-x_1\right)+a\left(\sin x_2-\sin x_1\right)=-b\left(\ln x_2-\ln x_1\right)=-b\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，

又由$y=x-\sin x$，可得$y'=1-\cos x\ge 0$，

∴函数$y=x-\sin x$为单调递增函数，

∴$x_2-\sin x_2>x_1-\sin x_1$，即$\sin x_2-\sin x_1<x_2-x_1$，

∴$-b\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\left(a+1\right)\left(x_2-x_1\right)$，································13 分

由（2）知，当$x>1$时，$\boldsymbol{\ln x>2\times\dfrac{x-1}{x+1}}$，∴$\boldsymbol{\ln\sqrt{x}>2\times\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}$，

即$\boldsymbol{\ln x=2\ln\sqrt{x}>4\times\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}$，∴$\ln\dfrac{x_2}{x_1}>4\times\dfrac{\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}-1}{\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}+1}=4\times\dfrac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$，································15 分

代入可得：$4\cdot(-b)\times\dfrac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}<\left(a+1\right)\left(x_2-x_1\right)=\left(a+1\right)\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)$，

则$4\cdot\dfrac{(-b)}{a+1}<\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)^2$，∴$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>2\sqrt{\dfrac{-b}{a+1}}$，

又因为$0<a<1$时，$\left(\sqrt{a}+1\right)^2=a+2\sqrt{a}+1>a+1=\left(\sqrt{a+1}\right)^2$，

所以$\sqrt{a}+1>\sqrt{a+1}$，所以$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\dfrac{2\sqrt{-b}}{\sqrt{a}+1}$.································17 分