

成都七中高 2026 届零诊模拟考试数学试题 (参考答案)

一、单项选择题:

DBAC ACDB

7. 解析: 第一类, 这五个数字为 0,0,0,1,2, 有 $C_2^1 \cdot C_4^1 = 8$ 种, 第二类, 这五个数字为 0,1,1,2,2, 有 $C_4^1 \cdot C_4^2 = 24$ 种, 所以能被 3 整除的五位数有 32 个.

8. 解析: 设事件 $A_i (i=1,2,3)$ 分别表示购买一辆汽车来自于甲乙丙车企,
事件 B 表示智驾出现故障,

则由全概率公式得 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{2}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{100} + \frac{1}{10} \times \frac{5}{100} = \frac{27}{1000},$$

$$\text{由贝叶斯公式得 } P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{10}{27}, P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{12}{27}, P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{5}{27},$$

所以甲乙丙要承担的责任比为 10: 12: 5.

二、多项选择题:

AD BCD ABD

10. 解析: 据题意方程 $ax+b=c^x$ 在区间 $[0,1]$ 内有解, 即 $\exists t \in [0,1]$, 使得 $at+b=c^t$,

$$\text{令向量 } \vec{m} = (a,b), \vec{n} = (t,1), \therefore \vec{m} \cdot \vec{n} = at+b \leq |\vec{m}| |\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2} \sqrt{t^2+1},$$

$$\therefore a^2+b^2 \geq \frac{(at+b)^2}{t^2+1} = \frac{e^{2t}}{t^2+1}, \text{ 令函数 } f(t) = \frac{e^{2t}}{t^2+1}, f'(t) = \frac{2e^{2t}(t^2+1)-2te^{2t}}{(t^2+1)^2} = \frac{2e^{2t}(t^2-t+1)}{(t^2+1)^2} > 0,$$

所以函数 $f(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上递增, $f(t)_{\min} = f(0) = 1$, 即 $a^2+b^2 \geq 1$, 故 BCD 满足条件.

$$11. \text{ 解析: } f'(x) = x + 4 - \frac{4x+1}{x} - 4\ln x = x - \frac{1}{x} - 4\ln x, \text{ 令函数 } g(x) = x - \frac{1}{x} - 4\ln x,$$

$$\text{则 } g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = \frac{x^2-4x+1}{x^2}, \therefore x_1 = 2-\sqrt{3}, x_2 = 2+\sqrt{3}, \text{ 使 } g'(x_1) = g'(x_2) = 0,$$

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0, x_1)$ 递增, 在 (x_1, x_2) 递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 递增, 且 $g(1) = 0$,

$$\therefore \exists a \in (0, x_1), c \in (x_2, +\infty), \text{ 使 } g(a) = g(c) = 0,$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, a)$ 递减, 在 $(a, 1)$ 递增, 在 $(1, c)$ 递减, 在 $(c, +\infty)$ 递增,

$\therefore f(x)$ 有四个单调区间, 且存在最小值,

$$\text{又函数 } g(x) = x - \frac{1}{x} - 4\ln x \text{ 存在三个零点 } a, 1, c, \text{ 且 } g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x + 4\ln x = -(x - \frac{1}{x} - 4\ln x),$$

$$\text{由 } g(a) = g(c) = 0, \text{ 可得 } a = \frac{1}{c},$$

$$\therefore a \cdot c = 1^2, \text{ 即 } a, 1, c \text{ 成等比数列. 故选 ABD.}$$

三、填空题:

$$2 \quad -20 \quad \frac{5\sqrt{10}}{54}$$

$$13. \text{ 解析: 令 } x=1, \text{ 得 } a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=1, \text{ 令 } x=-1, \text{ 得 } a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=81,$$

所以 $2(a_1 + a_3) = -80$, 即 $\frac{a_1 + a_3}{2} = -20$.

14. 解析: 以 AB 中点 O 为坐标原点, 分别以 OB, OC, OD 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

设 $M(x, y, 0)$, 由题意知点 M 到 C 的距离等于到平面 ABD 的距离, 故轨迹为抛物线 $x^2 = 2\sqrt{3}y - 3$,

$\because MN \perp AB$, $\therefore M, N$ 的横坐标相等, 设 $N(x, 0, z)$, 由 $NA + NB = 2\sqrt{2}$ 知点 N 的轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{2} + z^2 = 1$,

$$V_{N-ABM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \cdot |y \cdot z| = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} |x^2 + 3| \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{6}} \sqrt{(x^2 + 3)^2 (2 - x^2)},$$

令 $t = x^2 + 3 \geq 3$, $(x^2 + 3)^2 (2 - x^2) = t^2 (5 - t)$, 令函数 $f(t) = t^2 (5 - t)$, 则 $f'(t) = 10t - 3t^2 = t(10 - 3t)$,

当 $t = \frac{10}{3}$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{500}{27}$, 即三棱锥 $N-ABM$ 体积的最大值为 $\frac{5\sqrt{10}}{54}$.

四、解答题:

15. 解: (I) $\because a_n = 4a_{n-1} + 3 \cdot 4^n, (n \geq 2)$,

两端除以 4^n , 得 $\frac{a_n}{4^n} - \frac{a_{n-1}}{4^{n-1}} = 3$, 即 $b_n - b_{n-1} = 3$,3 分

由 $a_1 = 16$, 得 $b_1 = 4$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项, 3 为公差的等差数列,5 分

$\therefore b_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$6 分

(II) $\because \frac{a_n}{4^n} = 3n + 1$, $\therefore a_n = (3n + 1)4^n$,8 分

$\therefore S_n = 4 \times 4^1 + 7 \times 4^2 + \cdots + (3n + 1)4^n$, ①

$4S_n = 4 \times 4^2 + 7 \times 4^3 + \cdots + (3n + 1)4^{n+1}$, ②

由①-②, 得 $-3S_n = 4 \times 4^1 + 3 \times (4^2 + \cdots + 4^n) - (3n + 1)4^{n+1}$,10 分

$$\therefore S_n = \left(\frac{3n+1}{3}\right)4^{n+1} - \frac{4}{3} \times 4^1 - (4^2 + \cdots + 4^n)$$

$$= \left(\frac{3n+1}{3}\right)4^{n+1} - \frac{4}{3} \times 4^1 - \frac{16(1-4^{n-1})}{1-4}$$

$$= n \cdot 4^{n+1}. \quad \text{.....13 分}$$

16. 解: (I) 由 $(0.007 + 0.016 + a + 0.025 + 0.02) \times 10 = 1$, 得 $a = 0.032$2 分

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d = 30$, $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} \times 30 = 450$, 解得 $a_1 = 30$,4 分

$\therefore a_1 = 30, a_2 = 60, a_3 = 90, a_4 = 120, a_5 = 150$,5 分

保险公司收取的保费为:

$$10000(0.07a_1 + 0.16 \times a_2 + 0.32 \times a_3 + 0.25 \times a_4 + 0.2 \times a_5) = 1005000 \text{ (元)} \quad \text{.....7 分}$$

(II) ①若老人购买了此项保险, 则 X 的取值为 150, 2150.

$$\because P(X=150) = \frac{49}{50}, \quad P(X=2150) = \frac{1}{50},$$

$$\therefore E(X) = 150 \times \frac{49}{50} + 2150 \times \frac{1}{50} = 147 + 43 = 190 \text{ (元)}. \quad \text{.....10 分}$$

②若老人没有购买此项保险,则 Y 的取值为0, 12000.

$$\because P(Y=0)=\frac{49}{50}, P(Y=12000)=\frac{1}{50},$$

$$\therefore E(Y)=0\times\frac{49}{50}+12000\times\frac{1}{50}=240 \text{ (元)}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\because E(Y)>E(X),$$

$\therefore$ 给该老人购买此项保险比较划算. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

17. 解: (I) 取 ED' 中点 H , 连接 GH, AH ,

因为点 F, G 分别是 AB 与 CD' 的中点,

$$\therefore GH \parallel CE, AF \parallel CE,$$

$$\therefore GH \parallel AF, \text{ 且 } GH = AF,$$

故四边形 $AFGH$ 为平行四边形, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\therefore FG \parallel AH, \text{ 又 } FG \not\subset \text{平面 } AED', AH \subset \text{平面 } AED',$$

$$\therefore FG \parallel \text{平面 } AED'; \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由条件可知四边形 $ABCE$ 为边长为1的正方形,

$$\therefore AE \perp CE, AE \perp ED',$$

$$\text{又 } AE \parallel BC, \therefore BC \perp CE, BC \perp ED', \text{ 又 } CE \cap ED' = E,$$

$$\therefore BC \perp \text{平面 } CED'; \text{ 又 } CD' \subset \text{平面 } CED', \therefore BC \perp CD',$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCD' \text{ 中, } BD' = 2\sqrt{2}, BC = 1, \text{ 则 } CD' = \sqrt{7}.$$

$$\text{在 } \triangle CED' \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos \angle CED' = \frac{1+4-7}{2 \times 1 \times 2} = -\frac{1}{2}, \therefore \angle CED' = 120^\circ, \text{ 则 } \angle DED' = 60^\circ, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由 $BC \perp \text{平面 } CED'$, 又 $BC \subset \text{平面 } ABCE$, 得平面 $CED' \perp \text{平面 } ABCE$,

过 D' 作 $D'O \perp CD$ 于 O , 则 $D'O \perp \text{平面 } ABCE$,

$$\text{在 } Rt\triangle D'OE \text{ 中, } D'E = 2, \text{ 则 } D'O = \sqrt{3}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore D'$ 到平面 $ABCE$ 的距离为 $\sqrt{3}$,

$$\text{所以四棱锥 } D'-ABCE \text{ 的体积为 } V = \frac{1}{3} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(III) 过 O 作 AE 的平行线 OX , 如图,

分别以 OX, OC, OD' 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

$$\therefore A(1, 1, 0), E(0, 1, 0), D'(0, 0, \sqrt{3}), F(1, \frac{3}{2}, 0), C(0, 2, 0),$$

设平面 AED' 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

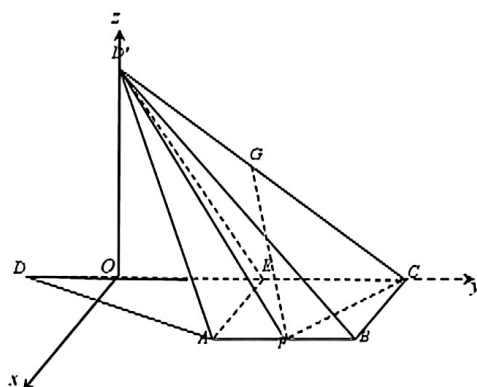
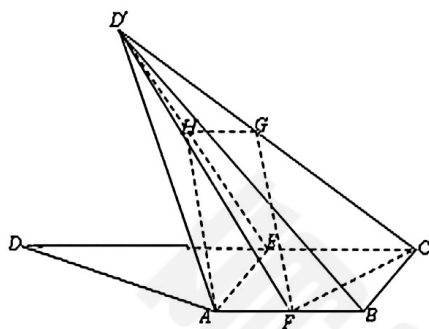
$$\because \vec{AE} = (-1, 0, 0), \vec{ED'} = (0, -1, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{ED'} = 0, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} -x_1 = 0, \\ -y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = \sqrt{3}z_1, \end{cases}$$

$$\text{令 } z_1 = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1),$$

设平面 CFD' 的法向量为 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\because \vec{CF} = (1, -\frac{1}{2}, 0), \vec{CD'} = (0, -2, \sqrt{3}).$$



$$\therefore \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CF} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} x_2 - \frac{1}{2}y_2 = 0, \\ -2y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}y_2, \\ z_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}y_2, \end{cases}$$

令 $y_2 = 2\sqrt{3}$, 则 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4)$ 13 分

记平面 AED' 与平面 CFD' 夹角为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{10}{2\sqrt{31}} = \frac{5\sqrt{31}}{31},$$

所以平面 AED' 与平面 CFD' 夹角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{31}}{31}$ 15 分

18. 解: (I) 由已知得 $a=2$, 2 分

当直线 l 过坐标原点时, 设 $P(x, y), Q(-x, -y)$,

$$\therefore \frac{y}{x-2} \cdot \frac{-y}{-x-2} = -\frac{1}{4}, \text{ 则 } y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$\text{又 } \because \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \therefore b^2 = 1, \text{ 即 } b=1. \text{ 4 分}$$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 5 分

(II) ①若直线 l 过坐标原点, 设 $P(x_0, y_0), Q(-x_0, -y_0)$,

$$l_{AP}: y = \frac{y_0}{x_0-2}(x-2), \text{ 令 } x=3, \text{ 得 } E(3, \frac{y_0}{x_0-2}), \text{ 同理可得 } F(3, \frac{y_0}{x_0+2}), \text{ 7 分}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\frac{y_0}{x_0-2} + \frac{y_0}{x_0+2}) = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 - 4} = \frac{x_0 y_0}{-4y_0^2} = \frac{x_0}{-4y_0}, \therefore M(3, \frac{x_0}{-4y_0}), \text{ 即 } k_1 = \frac{x_0}{-12y_0}, \text{ 9 分}$$

$$\text{又 } k_2 = \frac{y_0}{x_0}, \therefore k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{12}; \text{ 10 分}$$

②当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 方程为 $y=kx+m$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{由①可知 } E(3, \frac{y_1}{x_1-2}), F(3, \frac{y_2}{x_2-2}),$$

$$\therefore \vec{OE} \cdot \vec{OF} = 8,$$

$$\therefore 9 + \frac{y_1}{x_1-2} \cdot \frac{y_2}{x_2-2} = 8, \text{ 即 } y_1 y_2 + x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 0,$$

$$\therefore (kx_1 + m)(kx_2 + m) + x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 0,$$

整理得 $(k^2 + 1)x_1 x_2 + (km - 2)(x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0$, (*) 12 分

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases} \text{ 得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0, \Delta = 64k^2 m^2 - 16(m^2 - 1)(1 + 4k^2) > 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2},$$

$$\text{所以 (*) 化简为 } \frac{(k^2 + 1)(4m^2 - 4)}{1 + 4k^2} - \frac{8km(km - 2)}{1 + 4k^2} + m^2 + 4 = 0,$$

整理得 $12k^2 + 16km + 5m^2 = 0$, 即 $(2k + m)(6k + 5m) = 0$, 14 分

若 $2k + m = 0$, 直线 l 方程为 $y = kx - 2k$ 过点 $A(2, 0)$, 舍去,

若 $6k+5m=0$, 直线 l 方程为 $y=kx-\frac{6}{5}k$, 过定点 $(\frac{6}{5}, 0)$ 15 分

当直线 l 的斜率不存在时, 设直线 l 方程为 $x=t$, $P(t, y), Q(t, -y)$,

$$\therefore E(3, \frac{y}{t-2}), F(3, \frac{-y}{t-2}), \therefore 9 + \frac{y}{t-2} \cdot \frac{-y}{t-2} = 8, \text{ 又 } y^2 = 1 - \frac{t^2}{4},$$

解得 $t = \frac{6}{5}$ 或 $t = 2$ (舍去), 所以直线 l 过点 $(\frac{6}{5}, 0)$,

综上得, 直线 l 过定点 $(\frac{6}{5}, 0)$ 17 分

19. 解 (1) 函数 $F(x) = a(x - \frac{1}{x}) - \ln x$, $x > 0$,

$$\therefore F'(x) = a(1 + \frac{1}{x^2}) - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x + a}{x^2}, \quad x > 0, \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

①因为函数 $F(x)$ 无极值,

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增或单调递减, 2 分

当 $a \leq 0$ 时, $F'(x) < 0$, 满足条件, 3 分

当 $a > 0$ 时, 则 $F'(x) \geq 0$, 即 $ax^2 - x + a \geq 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$$\therefore \Delta = 1 - 4a^2 \leq 0, \text{ 解得 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 满足条件,} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$; 5 分

②由①知, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 6 分

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 7 分

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $F(x)$ 在区间 $(0, \frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a})$ 上递增, 在 $(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}, \frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a})$ 上递减, $(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}, +\infty)$ 上递增; 9 分

(II) 由 (I) 知当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(1) = 0$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $F(x) < 0$, 即 $x - \frac{1}{x} < 2\ln x$, 10 分

当 $x > 1$ 时, $F(x) > 0$, 即 $x - \frac{1}{x} > 2\ln x$, 11 分

所以当 $x > 0$ 时, 有 $|2\ln x| < |x - \frac{1}{x}|$, 即 $|\ln x^2| < |x - \frac{1}{x}|$, 12 分

令 $t = x^2$, 所以 $|\ln t| < |\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}|$, 平方得 $(\ln t)^2 < t + \frac{1}{t} - 2$, 13 分

$$\therefore a_n = (\ln \frac{n+1}{n})^2 < \frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} - 2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \quad \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$