树德中学高 2024 级高一下期期末测试数学试题

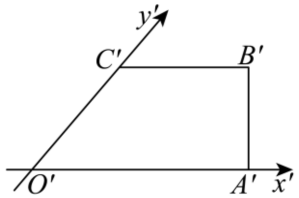
命题人：高一数学备课组　　审题人：罗莉、李波波、唐颖君

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.）

1．某学校高一、高二、高三年级的人数之比为$2:3:2$，若利用分层随机抽样的方法抽取一个容量为n的样本，高三年级抽取的人数为20人，则$n=$（　）

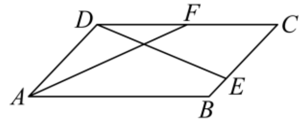
A．40　　B．50　　C．60　　D．70

2．如图，一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形$O'A'B'C'$，且$O'A'//B'C'$，$O'A'=2B'C'=2$，$A'B'=1$，则该平面图形的面积为（　）



A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

3．如图，在平行四边形$ABCD$中，点E满足$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$，点$F$为$CD$的中点，则$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AF}=$（　）



A．$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$　　C．$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$　　D．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$

4．已知a，b是两条直线，α，β是两个平面．下列命题正确的是（　）

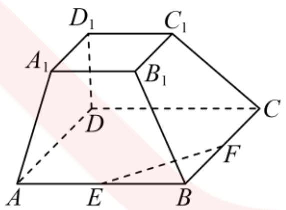
A．若$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则$a\perp b$　　B．若$a//\alpha$，$a//\beta$，$\alpha\cap\beta=b$，则$a//b$

C．若$a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$　　D．若$\alpha\perp\beta$，$a//\alpha$，则$a\perp\beta$

5．已知$\sin(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha=2\tan\beta$，则$\sin(\alpha-\beta)=$（　）

A．$\frac{m}{3}$　　B．$3m$　　C．$-\frac{m}{3}$　　D．$-3m$

6．《九章算术》中将正四棱台称为方亭，如图，在方亭$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2A_1B_1=4$，其体积为$\frac{28\sqrt{2}}{3}$，E，F分别为AB，BC的中点，则异面直线AA_1与EF所成角的余弦值为（　）

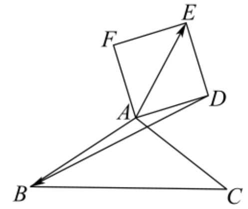


A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．已知函数$f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x+\sqrt{3}(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上有且仅有 3 个零点，则实数$\omega$的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{14}{3},\frac{20}{3}\right)$　　B．$\left[4,\frac{16}{3}\right)$　　C．$\left[4,\frac{22}{3}\right]$　　D．$\left[4,\frac{22}{3}\right)$

8．如图，$\triangle ABC$中，$\angle C=\frac{\pi}{4}$，$AC=2$，$BC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.在$\triangle ABC$所在的平面内，有一个边长为 1 的正方形$ADEF$绕点A按逆时针方向旋转（不少于 1 周），则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}$的取值范围是（　）



A．$[-5,5]$　　B．$[-5,3]$　　C．$[-3,3]$　　D．$[-3,5]$

二、多选题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.）

9．i 为虚数单位，下列关于复数的说法正确的是（　）

A．$|(8-6\mathrm{i})\mathrm{i}|=10$　　B．$\frac{6-8\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-8-6\mathrm{i}$

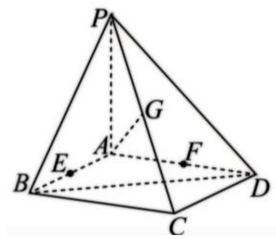
C．若复数z满足$z^2\in\mathbf{R}$，则$z\in\mathbf{R}$　　D．若复数z满足$|z-\mathrm{i}|=1$，则$|z-1|$的最小值为$\sqrt{2}-1$

10．在$\triangle ABC$中，$AB=2,AC=3,A=\frac{\pi}{3}$，点$D$为边$BC$上一动点，则（　）

A．$BC=\sqrt{7}$　　B．当AD为边BC上的高线时，$AD=\frac{3\sqrt{21}}{14}$

C．当AD为边BC上的中线时，$AD=\frac{\sqrt{19}}{2}$　　D．当AD为角A的角平分线时，$AD=\frac{12\sqrt{3}}{5}$

11．在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 1 的正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=1$，点E，F，G分别为棱AB,AD,PC的中点，则（　）



A．$AG\perp PD$　　B．平面EFG与平面$ABCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

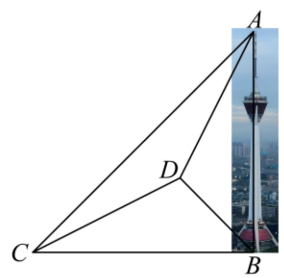
C．过点E，F，G的平面截四棱锥$P-ABCD$所得的截面图形的周长为$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

D．设点Q为侧面PAD内（包括边界）的一动点，且$BQ=\frac{\sqrt{15}}{3}$，则点Q的轨迹长度为$\frac{\sqrt{6}}{18}\pi$

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12．向量$\vec{a}=(2,\lambda),\vec{b}=(1,3)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则实数$\lambda$的值为_________.

13．天府熊猫塔是中国西部第一高塔，信号覆盖半径80公里，是四川省广播、电视、微波传输发射枢纽．如图，为了测量该塔的高度，无人机在与塔底B位于同一水平面的C点测得塔顶A的仰角为45°，无人机沿着仰角$\alpha(0^\circ<\alpha<45^\circ)$的方向靠近塔，飞行了$113\sqrt{5}$m到达$D$点，在$D$点测得塔顶A的仰角为$63^\circ$，塔底$B$的俯角为$45^\circ$，且A、$B$、$C$、$D$四点在同一平面上，则该塔的高度为_____m.（参考数据：取$\tan63^\circ=2$）



14．如图 1，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ACD$ 是边长为 2 的等边三角形，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折，使得点 D 到点 P 的位置，如图 2 所示。若平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为____________．若二面角 $P-AC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为____________．

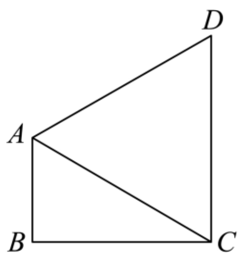


图1

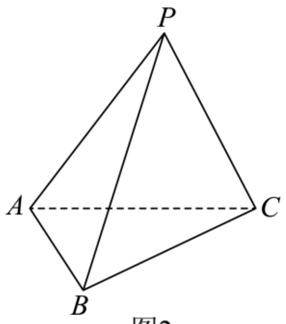
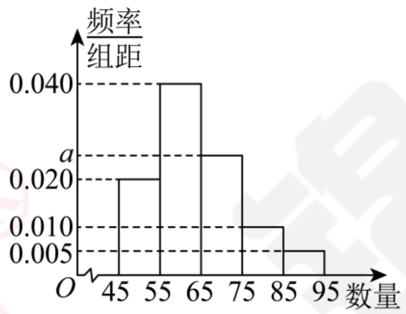


图2

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15．（本小题共 13 分）为了调查某厂工人生产某种产品的能力，随机抽查了 40 名工人某天生产该产品的数量，得到频率分布直方图如图所示.



(1)求频率分布直方图中 a 的值.

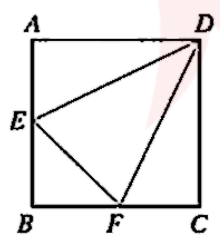
(2)求这 40 名工人一天生产该产品的数量的众数，80%分位数和平均数.

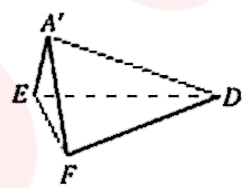
16．（本小题共 15 分）如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 AB 的中点，点 F 是 BC 的中点，将 $\triangle AED$，$\triangle BEF$，$\triangle DCF$ 分别沿 DE，EF，DF 折起，使 A，B，C 三点重合于点 A'。

(1)求证 $A'D\perp EF$；

(2)求三棱锥 $A'-EFD$ 的体积.

(3)求点 F 到平面 $A'ED$ 的距离.





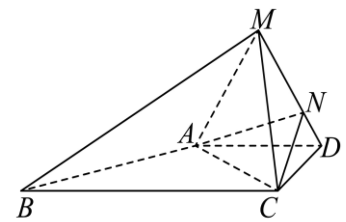
17．（本小题共 15 分）已知向量 $\vec{m}=(\sin(\frac{\pi}{4}+x),\sqrt{3}\sin x)$，$\vec{n}=(\sin(\frac{\pi}{4}-x),\cos x)$，设函数 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$．

(1)化简 $f(x)$ 并写出 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)若 $f\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，且 $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{7\pi}{6}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

(3)在锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $f\left(\frac{A}{2}\right)=1$，$AC=2$，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围。

18．（本小题共 17 分）如图，在四棱锥 $M-ABCD$ 中，$AD//BC, AC\perp CD, BC=2AD,$ $\triangle MAD$ 是边长为 6 的等边三角形，平面 $MAD\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 为 AD 的中点，点 N 在棱 MD 上，直线 $MB//$ 平面 ACN．



(1)证明：$ME\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求 $\frac{MN}{ND}$ 的值；

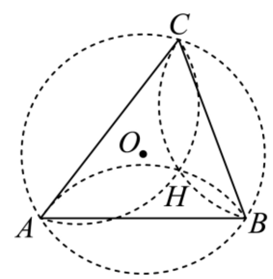
(3)设二面角 $M-AC-D$ 的平面角为 α，直线 CN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ，若 $\tan\alpha$ 的取值范围是 $\left(\sqrt{3},3\sqrt{3}\right]$，求 $\tan\theta$ 的取值范围.（**注意：本题使用建系法不给分！**）

19．（本小题共 17 分）某数学兴趣小组探索三角形相关知识时，发现了一个有趣的性质：将锐角三角形的三条边所对的外接圆的三条圆弧（劣弧），沿者三角形的边进行翻折，则三条圆弧交于该三角形内部一点，且此交点为该三角形的垂心（即三角形三条高线的交点），如图，已知锐角 $\triangle ABC$ 中，$BC=4$，其外接圆 O 的半径为 $\frac{8}{7}\sqrt{7}$，且三条圆弧沿 $\triangle ABC$ 三边翻折后交于点 H.

(1)求 $\sin\angle HCA$；

(2)若点 T 为劣弧 BHC 上一动点，求 $\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TC}$ 的最小值；

(3)若 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}=-10$，求 $HA+HB+HC$ 的值.



树德中学高 2024 级高一下期期末测试数学试题

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	D	D	B	B	A	C	D	B	ABD	AC	AD

二、填空题

12. 6；　　**13.** 339；　　**14.** $\frac{16}{3}\pi$；8π；

三、解答题

15.【详解】(1) 解：由频率分别直方图的性质，可得 $(0.020+0.040+a+0.010+0.005)\times 10=1$，------2 分

解得 $a=0.025$.------------------------5 分

（2）解：由频率分布直方图，可得众数为 $\frac{55+65}{2}=60$，--------------7 分

设 80%分位数为 x，则 $0.6+(x-65)\times 0.025=0.8$，解得 $x=73$，所以中位数为 73，------------10 分

这 40 名工人一天生产该产品的数量的平均数为: $0.2\times 50+0.4\times 60+0.25\times 70+0.1\times 80+0.05\times 90=64$，

所以这 40 名工人一天生产该产品的数量的平均数为 64 .----------------13 分

16.【详解】(1) 解：折叠前 $AD\perp AE$，$CD\perp CF$，折叠后 $A'D\perp A'E$，$A'D\perp A'F$

因为 $A'E\cap A'F=A'$，$A'E$、$A'F\subset$ 平面 $A'EF$，故 $A'D\perp$ 平面 $A'EF$，

因为 $EF\subset$ 平面 $A'EF$，故 $A'D\perp EF$.--------------5 分

（2）由（1）问可知，$A'D\perp$ 平面 $A'EF$，所以三棱锥 $D-A'EF$ 的高 $A'D=AD=2$

又因为 $\triangle A'EF$ 折叠前为 $\triangle BEF$，点 E，F 分别为 AB，BC 的中点

所以 $S_{\triangle A'EF}=S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$，所以 $V_{A'-EFD}=V_{D-A'EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle A'EF}\bullet A'D=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$

-----------10 分

（3）设点 F 到平面 $A'ED$ 的距离为 h，则有 $V_{A'-EFD}=V_{F-A'ED}=\frac{1}{3}S_{\triangle A'ED}\bullet h=\frac{1}{3}$

又有 $S_{\triangle A'ED}=\frac{1}{2}\times A'E\times A'D=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$，故解得 $h=1$。------------15 分

17.【详解】(1) $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

故最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.------------4 分

（2）因为 $f\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，由 $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{7\pi}{6}$，则 $\frac{7\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{1}{3}$，-----------6 分

则 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$；

---------------9 分

（3）因为 $f\left(\frac{A}{2}\right)=\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$，-----10 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin B}=\frac{c}{\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}$，可得三角形 ABC 的周长

$l=a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}+2+\frac{2\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}+\frac{\sin B+\sqrt{3}\cos B}{\sin B}+2$

$=\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos B}{\sin B}+3==\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\tan B}\right)+3$，（方法不唯一也可$=\frac{\sqrt{3}}{\tan\frac{B}{2}}+3$）-----------12 分

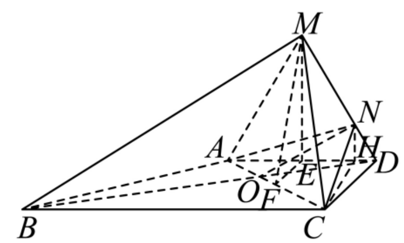
由$\triangle ABC$为锐角三角形,可得 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，

因为 $y=\sin B, y=\tan B$ 都在 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $y=\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\tan B}$ 在 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

即 $\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\tan B}\in\left(1,2+\sqrt{3}\right)$，所以 $a+b+c$ 的取值范围为 $\left(3+\sqrt{3},6+2\sqrt{3}\right)$.---------------15 分

18.【详解】(1) 如图，连接 ME，因为 $\triangle MAD$ 为等边三角形，E 是 AD 的中点，所以 $ME\perp AD$，

又平面 $MAD\perp$ 平面 $ABCD$，$ME\subset$ 平面 MAD，平面 $MAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，



所以 $ME\perp$ 平面 $ABCD$.--------4 分

（2）连接 BD 交 AC 于点 O，连接 ON，

因为 $MB//$ 平面 ACN，$MB\subset$ 平面 MBD，平面 $MBD\cap$ 平面 $ACN=ON$，

所以 $MB//ON$，则 $\frac{MN}{ND}=\frac{BO}{OD}$，

因为 $BC//AD$，$BC=2AD$，所以 $\frac{BO}{OD}=\frac{BC}{AD}=2$，故 $\frac{MN}{ND}=2$.---------9 分

（3）如图，取 AC 的中点 F，

因为 $ME\perp$ 平面 $ABCD$，$EF,AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $ME\perp AC$，$ME\perp EF$.

又 E,F 分别是 AD,AC 的中点，所以 $EF//CD$，

由 $AC\perp CD$，得 $AC\perp EF$，

因为 $EF\cap ME=E$，$EF,ME\subset$ 平面 MEF，所以 $AC\perp$ 平面 MEF，

因为 $MF\subset$ 平面 MEF，则 $AC\perp MF$，

所以 $\angle MFE$ 是二面角 $M-AC-D$ 的平面角，即 $\angle MFE=\alpha$.——————————11 分

因为 $\triangle MAD$ 是边长为 6 的等边三角形，所以 $ME=3\sqrt{3}$.

设 $EF=m$，则 $CD=2m$，$\tan\alpha=\frac{ME}{EF}=\frac{3\sqrt{3}}{m}\in\left(\sqrt{3},3\sqrt{3}\right]$，得 $m\in[1,3)$，

过 N 作 $NH//ME$ 交 AD 于 H，连接 CH，由 $ME\perp$ 平面 $ABCD$，得 $NH\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\angle NCH$ 为直线 CN 与平面 $ABCD$ 所成的角，即 $\angle NCH=\theta$.-------------12 分

由 $\frac{MN}{ND}=2$ 得 $NH=\frac{1}{3}ME=\sqrt{3}$，$DH=\frac{1}{3}ED=1$，

在 $Rt\triangle ADC$ 中，$\cos\angle ADC=\frac{CD}{AD}=\frac{2m}{6}=\frac{m}{3}$.

在 $\triangle CDH$ 中，由余弦定理可得 $CH^2=CD^2+DH^2-2CD\times DH\cos\angle HDC$，

所以 $CH=\sqrt{4m^2+1-2\times2m\times\frac{m}{3}}=\sqrt{\frac{8m^2+3}{3}}$，所以 $\tan\theta=\frac{NH}{CH}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{8m^2+3}{3}}}=\frac{3}{\sqrt{8m^2+3}}$------15 分

因为 $m\in[1,3)$，所以 $\tan\theta=\frac{3}{\sqrt{8m^2+3}}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{3\sqrt{11}}{11}\right]$，所以 $\tan\theta$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{3\sqrt{11}}{11}\right]$.————————17 分

19.【详解】（1）在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\because BC=4$，其外接圆 O 的半径为 $\frac{8}{7}\sqrt{7}$，

$\therefore$ 由正弦定理可得：$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{4}{\sin\angle BAC}=2\times\frac{8}{7}\sqrt{7}$，解得 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$\therefore\cos\angle BAC=\sqrt{1-(\sin\angle BAC)^2}=\sqrt{1-\frac{7}{16}}=\frac{3}{4}$.

由题可知 $\angle HCA=\frac{\pi}{2}-\angle BAC$，$\therefore\sin\angle HCA=\sin(\frac{\pi}{2}-\angle BAC)=\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$.————4 分

（2）设点 M 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 所对的外接圆的劣弧，点 D 为边 BC 的中点.

由题意及对称性可知 $\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{MD}^2-\overrightarrow{DB}^2=\overrightarrow{MD}^2-4$.

故要使 $\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TC}$ 取得最小值，只需 $|\overrightarrow{MD}|$ 最小.

在圆 O 上，由三角形三边关系可知 $MD+OD\ge OM=\frac{8}{7}\sqrt{7}$，当且仅当 M,O,D 三点共线时取等号，此时 $MD=OM-OD=\frac{8}{7}\sqrt{7}-\sqrt{OD^2-BD^2}=\frac{8}{7}\sqrt{7}-\sqrt{OC^2-BD^2}=\frac{8}{7}\sqrt{7}-\frac{6}{7}\sqrt{7}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$.

$\therefore\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{MD}^2-4\ge\left(\frac{2}{7}\sqrt{7}\right)^2-4=-\frac{24}{7}$，即 $\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TC}$ 的最小值为 $-\frac{24}{7}$.——————————9 分

（3）由（1）可知：$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\cos\angle BAC=\sqrt{1-\frac{7}{16}}=\frac{3}{4}$.

$\because\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=-10$，$\therefore\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$.

又 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC-|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos\angle BOA$，

$\therefore$ 由圆的性质可知

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{8}{7}\sqrt{7}\times\frac{8}{7}\sqrt{7}\cos2\angle BAC-\frac{8}{7}\sqrt{7}\times\frac{8}{7}\sqrt{7}\cos2\angle BCA=\frac{64}{7}\cos2\angle BAC-\frac{64}{7}\cos2\angle BCA=10$.

又 $\cos2\angle BAC=2(\cos\angle BAC)^2-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$，

$\therefore\frac{64}{7}\times\frac{1}{8}-\frac{64}{7}\cos2\angle BCA=10$，解得 $\cos2\angle BCA=-\frac{31}{32}$.

$\therefore$ 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\cos\angle BCA=\sqrt{\frac{\cos2\angle BCA+1}{2}}=\frac{1}{8}$，$\sin\angle BCA=\sqrt{\frac{1-\cos2\angle BCA}{2}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

$\sin\angle ABC=\sin(\angle BCA+\angle BAC)=\sin\angle BCA\cos\angle BAC+\cos\angle BCA\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，

$\cos\angle ABC=\sqrt{1-(\sin\angle ABC)^2}=\frac{9}{16}$.

$\therefore$ 由正弦定理可得：$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2\times\frac{8}{7}\sqrt{7}$，

$\therefore AB=2\times\frac{8}{7}\sqrt{7}\sin\angle BCA=2\times\frac{8}{7}\sqrt{7}\times\frac{3}{8}\sqrt{7}=6$，

$AC=2\times\frac{8}{7}\sqrt{7}\sin\angle ABC=2\times\frac{8}{7}\sqrt{7}\times\frac{5}{16}\sqrt{7}=5$.----------12 分

在$\triangle ABC$中，点H是$\triangle ABC$的垂心可得$\angle AHC=\pi-\angle ABC$，$\angle BHC=\pi-\angle BAC$，$\angle AHB=\pi-\angle ACB$.

在$\triangle AHC$中，由正弦定理可得$\frac{HA}{\sin\angle ACH}=\frac{AC}{\sin\angle AHC}$，

$$\therefore HA=\frac{AC\sin\angle ACH}{\sin\angle AHC}=\frac{5\cos\angle BAC}{\sin(\pi-\angle ABC)}=\frac{5\cos\angle BAC}{\sin\angle ABC}=\frac{5\times\frac{3}{4}}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}=\frac{12\sqrt{7}}{7}.$$

同理可得$HB=\frac{AB\sin\angle BAH}{\sin\angle AHB}=\frac{6\cos\angle ABC}{\sin(\pi-\angle ACB)}=\frac{6\cos\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\frac{6\times\frac{9}{16}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{9\sqrt{7}}{7}$，

$$HC=\frac{BC\sin\angle CBH}{\sin\angle BHC}=\frac{4\cos\angle BCA}{\sin(\pi-\angle BAC)}=\frac{4\cos\angle BCA}{\sin\angle BAC}=\frac{4\times\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

$\therefore HA+HB+HC=\frac{12\sqrt{7}}{7}+\frac{9\sqrt{7}}{7}+\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{23\sqrt{7}}{7}$.————————17 分