

2026 届高三年级 8 月份联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. C 【解析】因为 A 是由方程 $x^2 = x$ 的所有实数根组成的集合, 所以 $A = \{0, 1\}$, 则 $A \cap B = \{0, 1\}$. 故选 C.

2. D 【解析】不妨设 $z = a + bi, a > 0, b > 0$, 则 $\frac{z}{i} = \frac{a+bi}{i} = b + \frac{a}{i} = b - ai$, 所以 $\frac{z}{i}$ 在复平面内对应的点位于第四象限. 故选 D.

3. B 【解析】由抛物线的定义可得 $\frac{p}{2} = 8$, 解得 $p = 16$, 故 $C: y^2 = 32x$, 令 $x = 2$ 可得 $n = 8$. 故选 B.

4. A 【解析】由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 中心对称, 可得 $\frac{4\pi}{3} + \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 又因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 故 $f(0) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

5. D 【解析】由题意可得 $\overrightarrow{BA} = (0, 1), \overrightarrow{BC} = (-2, 3)$, 于是 $|\overrightarrow{BA}| = 1, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, 故 $\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3}{1 \times \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$. 故选 D.

6. B 【解析】从排列组合的角度考虑可知: 当次数全部分配给 -2 时, 常数为 $(-2)^5$, 次数分配为 $1, 2, 2$ 时, 常数为 $C_5^1 C_4^2 (-1)^2 (-2)^2$, 相加得常数项为 88 . 故选 B.

7. D 【解析】对于充分性, 当 $a_n = (-1)^n$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列, 但 $S_{n+2} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} = (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} = (-1)^n (-1+1) = 0$, 但等比数列的各项均不为 0 , 故此时 $\{S_{n+2} - S_n\}$ 不是等比数列, 故充分性

不成立; 对于必要性, 不妨令 $\{S_{n+2} - S_n\}$ 的公比为 1 , 则 $a_{n+1} + a_{n+2} = a_2 + a_3$, 于是显然可得 $a_{2k+1} = a_3, a_{2k} = a_2, k \in \mathbb{N}^+$, 不妨取 $a_2 = 0, a_3 = 1$, 此时 $S_{n+2} - S_n = 1, \{S_{n+2} - S_n\}$ 是等比数列, 但 $\{a_n\}$ 不是等比数列, 故必要性不成立, 所以甲是乙的既不充分也不必要条件. 故选 D.

8. C 【解析】易知 M, N 在 x 轴异侧, 而四边形 MF_1NF_2 的内角和为 2π , 故 $\angle F_1MF_2 + \angle F_1NF_2 = \pi$. 不妨设 $\angle F_1MF_2 \geq \angle F_1NF_2$, 则 $\pi = \angle F_1MF_2 + \angle F_1NF_2 \leq 2\angle F_1MF_2$, 可得 $\angle F_1MF_2 \geq \frac{\pi}{2}$. 记 E 的半焦距为 $c, F_2M = t$, 则 $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{F_1M^2 + F_2M^2 - F_1F_2^2}{2 \times F_1M \times F_2M} \leq 0$, 即 $t^2 + (2a-t)^2 - (2c)^2 \leq 0$, 整理得 $(t-a)^2 \leq a^2 - 2b^2$, 故 $a^2 \geq 2b^2 = 2(a^2 - c^2)$, 即 $\frac{c}{a} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 于是 E 离心率的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

二、选择题

9. ACD 【解析】对于 A, 延长 FE 至点 M , 使得 $EF = EM$, 显然点 M 在平面 ABB_1A_1 内, 故 A 为假命题; 对于 B, 显然 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 而 $A_1E \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 故 $A_1E \perp BB_1$, 而 $\overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 而 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 故 $\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = 0$, 且 $\overrightarrow{A_1E}, \overrightarrow{BF}$ 分别为 A_1E, BF 的方向向量, 故 $A_1E \perp BF$, 而 $BB_1 \cap BF = B, BB_1 \subset$ 平面 $BB_1F, BF \subset$ 平面 BB_1F , 故 $A_1E \perp$ 平面 BB_1F , 故

B 为真命题; 对于 C, 显然 BF 与 D_1E 异面, 故点 D_1 在平面 BEF 外, 故 C 为假命题; 对于 D, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1E}$, 易知 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 故 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 \neq 0$, 故 D 为假命题. 故选 ACD.

10. AB 【解析】由于实验结果 2 的 $R_2^2 = 0.9944 > 0.8$, 故可认为该实验中的自变量与因变量符合线性回归模型, 故 A 正确; 在实验结果 1 中, 与线性回归直线偏离最远的样本点为自变量最小的点, 读图, 其约为 0.33, 故 B 正确; 由于 $R_1^2 < R_2^2$, 而 R^2 越大拟合效果越好, 则实验结果 1 相较于实验结果 2 拟合更差, 故 C 错误; 由前述分析, 在实验结果 1 中, 与线性回归直线偏离最远的样本点为自变量最小的点, 对应的异常样本点的因变量也最小, 故删去该点之后因变量的值应变大, 即实验结果 1 的因变量的平均值小于实验结果 2 的因变量的平均值, 故 D 错误. 故选 AB.

11. ACD 【解析】对于 A 选项, 易知 $\sin C = 3\cos C$, $\sin^2 C = 9(1 - \sin^2 C)$, 而 $\sin C > 0$, 故可解得 $\sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 而 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$, 于是 $\cos A \sin B = \sin C - \sin A \cos B = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 故 A 正确; 对于 B 选项, 由 $\sin A \cos B = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 与 $\cos A \sin B = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 作比可得 $\tan B = 2\tan A$, 而 $\tan C = -\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \frac{3\tan A}{2\tan^2 A - 1} = 3$, 于是 $2\tan^2 A - \tan A - 1 = 0$, 若 $\tan A = -\frac{1}{2}$, 则

$\tan B = -1$, 此时 $A > \frac{\pi}{2}$, $B > \frac{\pi}{2}$, $A + B > \pi$, 矛盾, 于

是 $\tan A = 1$, $A = \frac{\pi}{4}$, 此时 $\tan B = 2$, 易解得 $\sin B =$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 而由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, 故 $\frac{AC}{BC} =$

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}, AC = \frac{2\sqrt{10}}{5} BC = \frac{4\sqrt{5}}{5} <$$

$2\sqrt{2}$, 故 B 错误; 对于 C 选项, $\triangle ABC$ 的面积 $S =$

$$\frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} =$$

$$\frac{6}{5}, \text{故 C 正确; 对于 D 选项, 由 } \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5} > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{知 } A = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} < B, \text{故 } 3A + 2C = A +$$

$$2(\pi - B) < 2\pi - B < 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} < 5B, \text{故 D 正确. 故}$$

选 ACD.

三、填空题

12. 4 【解析】由圆方程: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = a+5$

可知 $a > -5$, 且圆的圆心为 $(2, 1)$, 半径为 $r =$

$$\sqrt{a+5}, \text{由题意可得 } \sqrt{a+5} = 2 - (-1) = 3, \text{解得}$$

$$a = 4 > -5. \text{故答案为 } 4.$$

13. 2 【解析】由诱导公式易得 $f(x) = \sin x - \frac{2}{x} + 3$,

$$\text{且 } f(m) = \sin m - \frac{2}{m} + 3 = 4, \text{所以 } \sin m - \frac{2}{m} = 1, \text{则}$$

$$f(-m) = \sin(-m) - \frac{2}{-m} + 3 = -\left(\sin m - \frac{2}{m}\right) + 3$$

$$= -1 + 3 = 2. \text{故答案为 } 2.$$

14. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ 【解析】如图, 作 $DE \perp BC$, $AF \perp CD$, 对于任

意的点 D, 当平面 $A'CD \perp$ 平面 BCD 时四面体体积

最大,此时 $AF=h$ 为四面体的高,不妨设 $DE=x$,则

$CE=2\sqrt{2}(1-x)$. 由 $AC \cdot CE=AF \cdot CD$ 可得 $h=$

$$\frac{2\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+8(1-x)^2}}, \text{又} \triangle BCD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times x$$

$=\sqrt{2}x$, 所以四面体的体积为 $V=$

$$\frac{4}{3} \frac{x(1-x)}{\sqrt{x^2+8(1-x)^2}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{(1-x)^2 + \frac{8}{x^2}}}. \text{记函数}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{8}{x^2}, \text{定义域为 } (0,1), \text{则 } f'(x) =$$

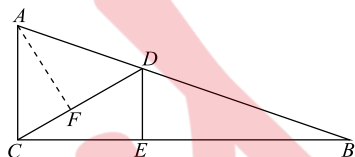
$$\frac{2}{(1-x)^3} - \frac{16}{x^3} = \frac{2(3x-2)[x^2+2x(1-x)+4(1-x)^2]}{x^3(1-x)^3}$$

$$= \frac{2(3x-2)[3(x-1)^2+1]}{x^3(1-x)^3}. \text{所以 } x \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ 时,}$$

$$f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减, } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \text{ 时, } f'(x) >$$

$$0, f(x) \text{ 单调递增, } f(x) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) = 27, \text{所以 } V \leq$$

$$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{4\sqrt{3}}{27}. \text{故答案为 } \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$



四、解答题

15. 解:(1) 设事件 A 为“至少中奖 1 次”,则事件 $\bar{A}$ 为

“没有一次中奖”. (1 分)

$$\text{则 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - 0.4)^2 (1 - 0.5) =$$

$$0.82. \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 由题意可得 X 的取值为 0, 1, 2, 3. (6 分)

$$\text{且 } P(X=0) = 0.6^2 \times 0.5 = 0.18. \quad (7 \text{ 分})$$

$$P(X=1) = C_2^1 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.5 + 0.6^2 \times 0.5 =$$

$$0.42. \quad (8 \text{ 分})$$

$$P(X=2) = 0.4^2 \times 0.5 + C_2^2 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.5 =$$

$$0.32. \quad (9 \text{ 分})$$

$$P(X=3) = 0.4^2 \times 0.5 = 0.08. \quad (10 \text{ 分})$$

则 X 的分布列:

X	0	1	2	3
P	0.18	0.42	0.32	0.08

(11 分)

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times 0.18 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.32 + 3$$

$$\times 0.08 = 1.3. \quad (13 \text{ 分})$$

16. 解:(1) 显然 $a_1 = f(1) = 4$, (1 分)

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = f(n) - f(n-1) = n^2 + 3n - (n-1)^2$$

$$- 3(n-1) = 2n + 2, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{且当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 4 = 2 \times 1 + 2, \text{适合上式.} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{故 } a_n = 2n + 2. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{易得 } f'(x) = 2x + 3, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{故 } f'(2n) = 4n + 3,$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a_n f'(2n)} = \frac{1}{(2n+2)(4n+3)}$$

$$= \frac{2}{(4n+3)(4n+4)} = \frac{2}{4n+3} - \frac{2}{4n+4}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{故 } T_n = \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{11} - \frac{2}{12} + \cdots + \frac{2}{4n+3} - \frac{2}{4n+4},$$

(11 分)

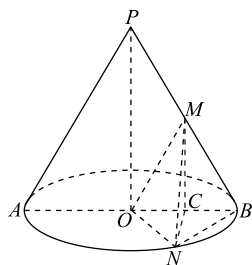
$$\text{注意到 } \frac{2}{4n+4} > \frac{2}{4(n+1)+3}, \quad (13 \text{ 分})$$

$$\text{故 } -\frac{2}{4n+4} + \frac{2}{4(n+1)+3} < 0, \quad (14 \text{ 分})$$

$$\text{故 } T_n < \frac{2}{7}. \quad (15 \text{ 分})$$

17. 解:(1) 取 OB 中点 C . 由 M 为 PB 中点可知 $MC \parallel$

$$PO, \quad (1 \text{ 分})$$



而 $AB \perp PO$, 故 $AB \perp MC$. 由 $MN \perp AB, MN \cap MC = M, MN \subset \text{平面 } MNC, MC \subset \text{平面 } MNC$, 可知 $AB \perp \text{平面 } MNC$, (3 分)

而 $NC \subset \text{平面 } MNC$, 故 $AB \perp CN$. (4 分)

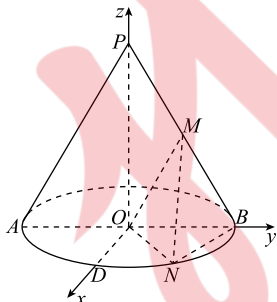
由 $OC = BC, CN = CN, \angle OCN = \angle BCN = \frac{\pi}{2}$ 可知

$\triangle OCN \cong \triangle BCN$, 故 $ON = BN$. (5 分)

由 $OB = ON$ 可知 $\triangle OBN$ 是等边三角形. (6 分)

(2) 取弧 AB 中点 D , 显然 $OP \perp OB, OP \perp OD, OB \perp OD$,

故以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OD}$ 的方向为 x 轴正方向, $\overrightarrow{OB}$ 的方向为 y 轴正方向, $\overrightarrow{OP}$ 的方向为 z 轴正方向, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$, (8 分)



不妨设 $OP = 2\lambda$, 则 $O(0, 0, 0), A(0, -2, 0), B(0, 2, 0), N(\sqrt{3}, 1, 0), M(0, 1, \lambda)$, 于是 $\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0)$, $\overrightarrow{OM} = (0, 1, \lambda), \overrightarrow{ON} = (\sqrt{3}, 1, 0)$. (9 分)

记平面 OMN 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} y + \lambda z = 0 \\ \sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}, \text{可取 } \mathbf{n} = (\lambda, -\sqrt{3}\lambda, 1)$$

$$(\sqrt{3}). \quad (11 \text{ 分})$$

记直线 AB 与平面 OMN 所成角为 θ ,

$$\text{故 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AB}| |\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{3}\lambda}{4\sqrt{4\lambda^2 + 3}} = \frac{\sqrt{66}}{11}, \quad (13 \text{ 分})$$

$$\text{即 } 3\lambda^2 = 6, \text{ 由 } \lambda > 0 \text{ 可得 } \lambda = \sqrt{2}, \quad (14 \text{ 分})$$

$$\text{故 } OP = 2\lambda = 2\sqrt{2}. \quad (15 \text{ 分})$$

18. 解: (1) 由双曲线定义可得 $|F_1A| - |F_2A| = 2a = 2$,

$$\text{故 } a = 1. \quad (1 \text{ 分})$$

将 $A(3, 2)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 可得 $9 - \frac{4}{b^2} = 1$, 解得 $b =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{故 } E \text{ 的方程为 } x^2 - 2y^2 = 1, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{故其渐近线方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) (i) 显然 $B(1, 0)$, 而 $A(3, 2)$, 故 AB 的斜率 $k =$

$$\frac{2-0}{3-1} = 1,$$

$$\text{于是 } AB \text{ 的方程为 } y = x - 1, \quad (5 \text{ 分})$$

故 $P(m, m-1)$. 设 Q 的横坐标为 n ,

则 $Q(n, n-1)$, 于是 $|BP| + |BQ| = \sqrt{1+k^2} (|m-1|$

$$+ |n-1|) = \sqrt{2} (m+n-2) = 4\sqrt{2}, \text{ 故 } n = 6-m, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{于是点 } Q \text{ 的坐标为 } (6-m, 5-m). \quad (9 \text{ 分})$$

(ii) 沿用 (i) 的结论. 记 E 的半焦距为 c , 则 $c =$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{故 } F_1 \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0 \right), F_2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0 \right).$$

$$\text{于是 } |F_1F_2| = \sqrt{6}, \quad (11 \text{ 分})$$

故 $\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}(m-1)|F_1F_2| = \frac{\sqrt{6}}{2}(m-1)$, 解得 $m=2$.

故 $Q(4,3)$, (13 分)

易知圆 $x^2 + (y+a)^2 = a^2$ 的圆心为 $N(0, -1)$, 半径为 $r=1$,

于是 $|MQ| \leq |NQ| + r = \sqrt{4^2 + (-1-3)^2} + 1 =$

$4\sqrt{2} + 1$, (15 分)

且 $|MQ| \geq |NQ| - r = 4\sqrt{2} - 1$, (16 分)

故 $|MQ|$ 的取值范围为 $[4\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} + 1]$. (17 分)

19. 解: (1) $a=3$ 时, $f(x) = \sin^3 x - 3\sin x$, $f'(x) =$

$3\sin^2 x \cos x - 3\cos x = -3\cos^3 x$, (2 分)

令 $k \in \mathbf{Z}$, 当 $x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, 单调递减区间为 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$,

$k \in \mathbf{Z}$. (4 分)

(2) (i) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - a$, 由 $-2 \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq a$, 解得

$a \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$, (5 分)

$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x - a \cos x = 3\cos x \left(\sin^2 x - \frac{a}{3}\right)$,

只要让 $f(x)$ 的所有极值均在 $[-2, a]$ 内即可. 记

$\cos x_1 = 0$, $\sin x_1 = \pm 1$, $f(x_1) = \sin^3 x_1 - a \sin x_1 =$

$(1-a)\sin x_1 = \pm(1-a)$, (7 分)

记 $\sin^2 x_2 = \frac{a}{3}$, $\sin x_2 = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$, $f(x_2) = \sin^3 x_2 -$

$a \sin x_2 = \left(\frac{a}{3} - a\right) \sin x_2 = \pm \frac{2\sqrt{3}a\sqrt{a}}{9}$, (8 分)

由 $\begin{cases} -2 \leq \pm(1-a) \leq a \\ -2 \leq \pm \frac{2\sqrt{3}a\sqrt{a}}{9} \leq a \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq a \leq 3 \\ a \geq -1 \\ 0 \leq a \leq \frac{27}{4} \\ 0 \leq a \leq 3 \end{cases}$,

故 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$. (10 分)

(ii) $x=0$ 时等号成立, 现证明当 $x > 0$ 时, $f(x) \leq$

$2a^2 x$. 当 $2a^2 x \geq a$ 时, $x \geq \frac{1}{2a}$, 即 $x \geq 1$, 此时 $f(x) \leq a$

$\leq 2a^2 x$, 符合题意. (11 分)

现考虑当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \leq 2a^2 x$ 成立. 等价于证明

$\sin^3 x \leq a \sin x + 2a^2 x$, 不妨先证明 $\sin^3 x \leq$

$\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x$. 设 $h(x) = x - \sin x$, $h'(x) = 1 - \cos x$

≥ 0 ,

故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增. 于是 $h(x) > h(0) = 0$,

故 $\sin x < x$, (13 分)

于是 $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x$, 而 $\sin^3 x - \sin x = \sin x (\sin^2 x -$

$1) < 0$,

故 $\sin^3 x < \sin x < \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \leq a \sin x + 2a^2 x$,

故当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \leq 2a^2 x$ 成立, (14 分)

于是当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 2a^2 x$ 成立. 取 $g(x) =$

$x(f(x) - 2a^2 x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$, 设 $y(x) =$

$f(x) - 2a^2 x = \sin^3 x - a \sin x - 2a^2 x$, 且 $y(-x) =$

$\sin^3(-x) - a\sin(-x) - 2a^2(-x) = -(\sin^3 x - a\sin x - 2a^2 x) = -y(x)$, 故 $y(x)$ 是奇函数, (16 分)

于是 $g(x) = xy(x)$ 是偶函数, 于是当 $x < 0$ 时, $g(x)$

$= g(-x) \leq 0$ 成立. 综上, $g(x) \leq 0$, 即 $xf(x) \leq 2a^2 x^2$ 成立. (17 分)

