

天一 & 云数(金榜智胜)大联考

2025—2026 学年高三年级第一次监测

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 A

命题透析 本题考查分层随机抽样.

解析 依题意,男生应抽取的人数是 $40 \times \frac{660}{1200} = 22$.

2. 答案 D

命题透析 本题考查复数的运算和虚部的概念.

解析 因为 $\frac{1-2i}{i} = -2-i$, 所以虚部为 -1 .

3. 答案 C

命题透析 本题考查集合的运算.

解析 由题可知 $B \subseteq A$, 则 $a+1=3$ 或 $a+1=a^2-1$, 解得 $a=2$ 或 $a=-1$. 当 $a=2$ 时, $a^2-1=3$, 此时集合 A 不满足集合中元素的互异性, 故舍去; 当 $a=-1$ 时, $A=\{2, 3, 0\}$, $B=\{2, 0\}$, 满足 $A \cap B = B$, 符合题意.

4. 答案 A

命题透析 本题考查三角恒等变换.

解析 $\sin 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$.

5. 答案 C

命题透析 本题考查求不等式组的解集.

解析 由 $\frac{x-2}{x-3} \leq 0$, 解得 $2 \leq x < 3$, 由 $e^x > 4$, 解得 $x > \ln 4 = 2\ln 2$, 因为 $0 < \ln 2 < 1$, 所以 $0 < 2\ln 2 < 2$, 所以原不等式组的解集为 $[2, 3)$.

6. 答案 B

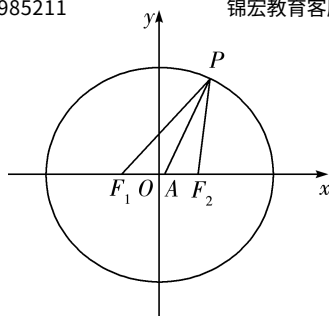
命题透析 本题考查等差数列的前 n 项和.

解析 由题知, 前 n 排每排的座位数依次构成一个以 15 为首项, 2 为公差的等差数列, 故前 n 排座位数之和为 $15n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + 14n$, 令 $n^2 + 14n \geq 700$, 验证可知 B 项符合题意.

7. 答案 A

命题透析 本题考查椭圆的定义及简单几何性质.

解析 由等面积法可得 $\frac{|AF_1|}{|PF_1|} = \frac{|AF_2|}{|PF_2|} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{|AF_1| + |AF_2|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{3}$, 即 C 的离心率为 $\frac{1}{3}$.



8. 答案 D

命题透析 本题考查余弦定理及基本不等式.

解析 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{c^2}{2} + \frac{3}{2}b^2}{2bc} = \frac{c}{4b} + \frac{3b}{4c} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $c = \sqrt{3}b$ 时等号成立, 解得 $0 < A \leq \frac{\pi}{6}$, 所以 A 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 答案 CD

命题透析 本题考查数列的概念及前 n 项和.

解析 对于 A, $S_n = n^2 + 2n + 1$, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 4$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n + 1 - [(n-1)^2 + 2(n-1) + 1] = 2n + 1$, 对 $n = 1$ 不成立, 故 A 错误;

对于 B, 当 $a_n = 0$ 时, 满足 $S_n = na_1$, 但 $\{a_n\}$ 不是等比数列, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $S_{2\,025} = \frac{2\,025(a_1 + a_{2\,025})}{2} = \frac{2\,025 \times 2a_{1\,013}}{2} = 2\,025a_{1\,013}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $S_n = \lambda \cdot 2^n + \mu$, 所以公比为 2, $S_n = \frac{a_1(1-2^n)}{1-2} = -a_1 + a_1 \times 2^n$, 显然有 $\lambda + \mu = a_1 + (-a_1) = 0$, 故 D 正确.

10. 答案 ABD

命题透析 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 对于 A, 由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 2 - \sqrt{3}$ 或 $2 + \sqrt{3}$, 当 $x \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 2 - \sqrt{3})$, $(2 + \sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 上单调递减, 故 A 正确;

对于 B, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $f(x)$ 没有最值, 故 B 正确;

对于 C, D, 易知 $m = 2 - \sqrt{3}$, $n = 2 + \sqrt{3}$, 则 $0 < a < 2 - \sqrt{3}$, $b = 1$, $c > 2 + \sqrt{3}$, 所以 m, b, n 成等比数列, 故 C 错误, D 正确.

11. 答案 ACD

命题透析 本题考查双曲线的几何性质.

解析 由题易知 C 的通径长为 $\frac{2b^2}{a}$, 则 $\frac{2b^2}{a} = 2b^2$, 所以 $a = 1$, C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

对于 A, C 的离心率 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{b^2 + 1}$, 故 A 正确;

对于 B, 设 $P(x_0, y_0)$, 不妨先探究双曲线在第一象限的部分 (其他象限由对称性同理可得), 由 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得

$$y = \sqrt{b^2 x^2 - b^2}, \text{ 所以 } y' = \frac{b^2 x}{\sqrt{b^2 x^2 - b^2}}, \text{ 则在点 } P(x_0, y_0) \text{ 处的切线斜率为 } k = \frac{b^2 x_0}{\sqrt{b^2 x_0^2 - b^2}} = \frac{b^2 x_0}{y_0}, \text{ 所以在点 } P(x_0, y_0)$$

处的切线方程为 $y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{y_0}(x - x_0)$, 又因为 $x_0^2 - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 所以在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $x_0 x - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, 该

方程具有一般性, 设 $A(x_1, y_1)$ 是切线与渐近线在第一象限的交点, $B(x_2, y_2)$ 是切线与渐近线在第四象限的交

点, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm bx$, 由 $\begin{cases} x_0 x - \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \\ y = bx, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{b}{bx_0 - y_0}, \\ y = \frac{b^2}{bx_0 - y_0}, \end{cases}$ 所以点 $A\left(\frac{b}{bx_0 - y_0}, \frac{b^2}{bx_0 - y_0}\right)$, 同理可

得 $B\left(\frac{b}{bx_0 + y_0}, \frac{-b^2}{bx_0 + y_0}\right)$, 则 $|AB| = \sqrt{\left(\frac{b}{bx_0 - y_0} - \frac{b}{bx_0 + y_0}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{bx_0 - y_0} + \frac{b^2}{bx_0 + y_0}\right)^2} = 2\sqrt{(b^2 + 1)x_0^2 - 1}$, 又因

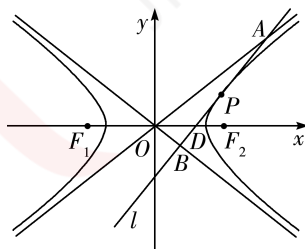
为 $x_0 \geq 1$, 所以 $|AB| \geq 2\sqrt{(b^2 + 1) - 1} = 2b$, 即 $|AB|_{\min} = 2b$, 故 B 错误;

对于 C, 由 B 知, $\frac{b}{bx_0 - y_0} + \frac{b}{bx_0 + y_0} = x_0$, $\frac{b^2}{bx_0 - y_0} + \frac{-b^2}{bx_0 + y_0} = y_0$, 所以 $P(x_0, y_0)$ 是线段 AB 的中点, 故 C 正确;

对于 D, 如图, 设 l 交 x 轴于点 D, 因为在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $x_0 x - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, 令 $y = 0$, 得 $x = \frac{1}{x_0}$, 所以点

$D\left(\frac{1}{x_0}, 0\right)$, 则 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \times |OD| \times |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x_0} \times \left(\frac{b^2}{bx_0 - y_0} + \frac{b^2}{bx_0 + y_0}\right) = b$, 是定值, 故 D

正确.



三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 答案 90° (或 $\frac{\pi}{2}$)

命题透析 本题考查向量的模与向量的夹角.

解析 因为 $|a| = |b|$, 所以 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 2a^2 + 2a \cdot b$, 再由 $|a + b| = \sqrt{2}|a|$, 得 $(a + b)^2 = 2a^2$,

所以 $a \cdot b = 0$, 故 a 与 b 的夹角大小为 90° .

13. 答案 $(-3, 0)$

命题透析 本题考查函数的极值点.

解析 依题意, 当 $a = 0$ 时, $f(x) = 3x^2 - x + 2$, 只有一个极值点, 不符合题意; 当 $a \neq 0$ 时, $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 1$,

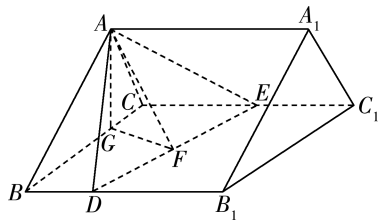
由 $f(x)$ 的两个极值点均为正数, 得 $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = 36 + 12a > 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < a < 0$.

14. 答案 1

命题透析 本题考查立体几何综合问题.

解析 如图, 取 DE 的中点 F , 连接 AF , 则 $AF \perp DE$. 作 $AG \perp BC$ 于点 G , 连接 FG , 由题可知平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 则 $AG \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AG \perp DE$, $AG \perp FG$, 又 $AF \perp DE$, $AF \cap AG = A$, 所以 $DE \perp$ 平面 AFG , 则 $\angle AFG = \alpha$.

由题可知 $\sin \beta = \frac{AC}{AE}$, 又 $AG = \frac{\sqrt{3}AC}{2}$, $AF = \frac{\sqrt{3}AE}{2}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{AG}{AF} = \frac{AC}{AE} = \sin \beta$, 即 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1$.



四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. **命题透析** 本题考查三角恒等变换及三角函数的图象与性质.

解析 (1) $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, (5 分)

令 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

故 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ (7 分)

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$, 则 $-1 \leq 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$, (10 分)

因为 $\exists x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得 $f(x) - 2t = 0$ 成立,

所以 $-1 \leq 2t \leq 2$, 即 $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$,

所以实数 t 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ (13 分)

16. **命题透析** 本题考查抛物线的几何性质及直线与抛物线的位置关系.

解析 (1) 根据抛物线的对称性, 以及点 $A_2(3, \sqrt{6}), A_3(3, -\sqrt{6})$ 关于 x 轴对称, 可知点 A_2, A_3 要么都在 C 上, 要么都不在 C 上, 因为 C 只经过三个点中的一点, 所以 A_2, A_3 都不在 C 上. (2 分)

所以点 $A_1(2, 2\sqrt{2})$ 在 C 上, 将其坐标代入 $y^2 = 2px$, 得 $p = 2$, (4 分)

所以 C 的方程为 $y^2 = 4x$ (5 分)

(2) 由 (1) 知 $F(1, 0)$. 设 $E(x_1, y_1), H(x_2, y_2)$, 则 $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ (6 分)

易知直线 EH, MN 的斜率均存在, 故设直线 EH 的方程为 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$,

由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x-1), \end{cases}$ 消去 y 整理得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$, (8 分)

则 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}$, $x_1 x_2 = 1$, $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k = \frac{4}{k}$, 所以 $P\left(1 + \frac{2}{k^2}, \frac{2}{k}\right)$ (10 分)

用 $-\frac{1}{k}$ 替换 k , 得 $Q(1 + 2k^2, -2k)$ (11 分)

当 $k \neq \pm 1$ 时, $k_{PQ} = \frac{\frac{2}{k} + 2k}{\frac{2}{k^2} - 2k^2} = \frac{k}{1 - k^2}$,

则直线 PQ 的方程为 $y + 2k = \frac{k}{1 - k^2}(x - 1 - 2k^2)$, 即 $(1 - k^2)y + k(3 - x) = 0$,

当 $x = 3$ 时, $y = 0$ (13 分)

当 $k = \pm 1$ 时, $P(3, \pm 2)$, $Q(3, \mp 2)$, 此时直线 PQ 过点 $(3, 0)$ (14 分)

故直线 PQ 过定点 $(3, 0)$ (15 分)

17. 命题透析 本题考查线线垂直的证明及空间向量的应用.

解析 (1) 如图, 连接 BD 交 AC 于点 H .

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 可得 $\tan \angle BAH = \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$, $\angle BAH = 60^\circ$, (1 分)

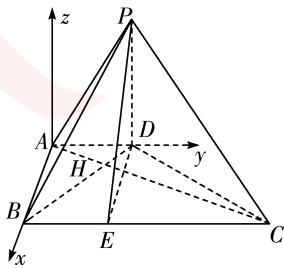
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 可得 $\tan \angle ABH = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle ABH = 30^\circ$, (2 分)

所以 $AC \perp BD$ (3 分)

又因为 $AC \perp PB$, 且 $PB \cap BD = B$, $PB, BD \subset \text{平面 } PDB$,

所以 $AC \perp \text{平面 } PDB$, (4 分)

因为 $PD \subset \text{平面 } PDB$, 所以 $AC \perp PD$ (5 分)



(2) 在直角梯形 $ABCD$ 中, 由题易知 $CD = \sqrt{7}$,

又 $PD = \sqrt{2}$, $PC = 3$, 所以 $PD^2 + DC^2 = PC^2$, 所以 $PD \perp CD$.

由(1)知 $AC \perp PD$, 且 $CD \cap AC = C$, $CD, AC \subset \text{平面 } ABCD$, 所以 $PD \perp \text{平面 } ABCD$ (8 分)

方法一: 如图, 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 连接 PE , 则四边形 $ABED$ 是矩形, $DE = AB = \sqrt{3}$.

易知 $PD \perp BC$, 又 $PD \cap DE = D$, 且 $PD, DE \subset \text{平面 } PDE$,

所以 $BC \perp \text{平面 } PDE$,

又因为 $PE \subset \text{平面 } PDE$, 所以 $BC \perp PE$,

所以 $\angle PED$ 为平面 PBC 与平面 $ABCD$ 所成角的平面角, (12 分)

在 $\text{Rt}\triangle PDE$ 中, 可得 $\tan \angle PED = \frac{PD}{DE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 所以 $\cos \angle PED = \frac{\sqrt{15}}{5}$,

故平面 PBC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ (15 分)

方法二: 以 A 为坐标原点, AB, AD 所在直线分别为 x 轴和 y 轴, 过点 A 且平行于 PD 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系如图所示, 可得 $A(0, 0, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(\sqrt{3}, 3, 0), D(0, 1, 0), P(0, 1, \sqrt{2})$ (9 分)

由题意可知 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量. (10 分)

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{BC} = (0, 3, 0), \overrightarrow{BP} = (-\sqrt{3}, 1, \sqrt{2})$,

所以 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 3y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP} = -\sqrt{3}x + y + \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$ 令 $x = \sqrt{2}$, 可得 $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$ (12 分)

设平面 PBC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ ,

则 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{1 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$,

故平面 PBC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ (15 分)

18. 命题透析 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (1) 由 $f(x) = \lambda x^3 - x^2$, 得 $\lambda = \frac{\ln x + x}{x^2}$.

令 $h(x) = \frac{\ln x + x}{x^2}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - 2\ln x - x}{x^3}$ (1 分)

令 $m(x) = 1 - 2\ln x - x$, 则 $m(x)$ 在定义域内单调递减, (3 分)

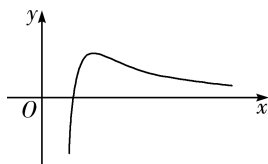
又 $m(1) = 1 - 2\ln 1 - 1 = 0$,

故当 $0 < x < 1$ 时, $m(x) > 0$, 即 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

当 $x > 1$ 时, $m(x) < 0$, 即 $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) > 0$ 且 $h(x) \rightarrow 0$,

作出 $h(x)$ 的大致图象如图:



由于 $\lambda > 0$, 且 $h(x) = \lambda$ 有唯一的实数根, 所以 $\lambda = 1$ (7 分)

(2) 由题意知 $f(x) \leq \frac{ax^2 - a}{2}$, 即 $x \ln x \leq \frac{ax^2 - a}{2}$, 也即 $2\ln x - ax + \frac{a}{x} \leq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 时恒成立.

设 $g(x) = 2\ln x - ax + \frac{a}{x}, x \geq 1$,

则 $g'(x) = \frac{2}{x} - a - \frac{a}{x^2} = \frac{-ax^2 + 2x - a}{x^2}$.

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 不满足条件. (10 分)

当 $a > 0$ 时, 令 $n(x) = -ax^2 + 2x - a, x \geq 1$, 则 $\Delta = 4 - 4a^2$.

当 $\Delta = 4 - 4a^2 \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, $n(x) \leq 0$,

则当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g'(x) \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(x) \leq g(1) = 0$, 满足条件. (13 分)

当 $\Delta = 4 - 4a^2 > 0$, 即 $0 < a < 1$ 时, 令 $n(x_0) = 0$, 解得 $x_0 = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} > 1$,

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $n(x) > 0$, 则 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (1, x_0)$ 时, 有 $g(x) > g(1) = 0$, 不满足条件. (16 分)

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ (17 分)

19. **命题透析** 本题考查相互独立事件的概率计算、全概率公式, 以及数列的综合应用.

解析 (1) 小明答 4 道题后积分小于 5, 则小明 4 题都答错, 或答对 1 题, 答错 3 题,

故所求概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 + C_4^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$ (3 分)

(2) 设小明答对的题数为 Y , 则他答错的题数为 $5 - Y$,

所以 $X = 5 + Y - (5 - Y) = 2Y$ (5 分)

由题意知 $Y \sim B\left(5, \frac{2}{3}\right)$, 所以 $E(Y) = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$, (7 分)

所以 $E(X) = 2E(Y) = \frac{20}{3}$ (8 分)

(3) (i) 当小明的积分为 $i (i = 1, 2, \dots, 9)$ 时, 若小明接下来一题答对, 则积分变为 $i + 1$, 若小明接下来一题答错, 则积分变为 $i - 1$.

由全概率公式有 $P_i = \frac{2}{3}P_{i+1} + \frac{1}{3}P_{i-1}$ (10 分)

整理可得 $P_{i+1} - P_i = \frac{1}{2}(P_i - P_{i-1})$.

又 $P_1 - P_0 = P_1 \neq 0$, 所以 $\{P_{i+1} - P_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 9)$ 为等比数列. (12 分)

(ii) 由 (i) 可得 $P_{i+1} - P_i = \frac{1}{2^i}P_1$,

所以 $P_{10} = (P_{10} - P_9) + (P_9 - P_8) + \dots + (P_2 - P_1) + P_1 = \frac{P_1 \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1\,023}{512}P_1$,

又 $P_{10} = 1$, 所以 $P_1 = \frac{512}{1\,023}$ (15 分)

所以 $P_5 = (P_5 - P_4) + (P_4 - P_3) + (P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) + P_1$

$= \frac{P_1 \left(1 - \frac{1}{2^5}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{512}{1\,023} \times \frac{31}{16} = \frac{32}{33}$ (17 分)

注: 结果写 $\frac{992}{1\,023}$ 也不扣分.