

绝密★启用前

四川大数据智学领航联盟2025—2026 学年高三 秋季入学摸底考试

数学试卷

试卷共4页,19小题,满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

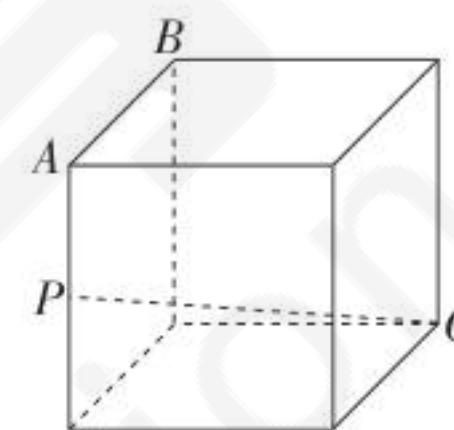
1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后,请将答题卡交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设命题 $p: \forall x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2025 \in \mathbf{N}^*$, 则 $\neg p$:
 - A. $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2025 \notin \mathbf{N}^*$
 - B. $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2025 \in \mathbf{N}^*$
 - C. $\exists x \notin \mathbf{Z}, x^2 + 2025 \notin \mathbf{N}^*$
 - D. $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2025 \notin \mathbf{N}^*$
2. 设复数 z 在复平面内对应的点位于第二象限, 则复数 zi 在复平面内对应的点位于
 - A. 第一象限
 - B. 第二象限
 - C. 第三象限
 - D. 第四象限
3. 已知点 $P(8,0)$ 关于原点的对称点在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上, 且 $Q(2,n)$ 为 C 上第一象限内一点, 则 $n =$
 - A. 1
 - B. 2
 - C. 4
 - D. 8
4. 样本数据 5.8, 5.9, 5.9, 6.0, 6.1, 6.1, 6.3, 6.1 的极差与第70百分位数之差为
 - A. -5.8
 - B. -5.6
 - C. 5.6
 - D. 5.8
5. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{4}{3-x} \geq 1\}$, 则 A 的非空真子集个数为
 - A. 6
 - B. 7
 - C. 14
 - D. 15
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $2A = B + C$, $AC = 8$, $\cos C = \frac{1}{7}$, 则 $BC =$
 - A. 11
 - B. 7
 - C. 16
 - D. $\frac{56}{5}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax + a, & x < 0, \\ 3e^x - bx, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $a+b$ 的最大值为
 - A. 0
 - B. 3
 - C. 6
 - D. 8

8. 如图, 棱长为2的正方体中, A, B, C 均为顶点, P 为所在棱的中点, 若平面 $\alpha \parallel PC$, 且 A, B 均在平面 α 内, 则平面 α 截正方体所得图形的外接圆面积为
 - A. $\frac{5\pi}{4}$
 - B. $\frac{7\pi}{4}$
 - C. $\frac{9\pi}{4}$
 - D. 9π



二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分。

9. 已知偶函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + xe^x$, 则
 - A. $f(-1) > 4$
 - B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^{-x} + xe^{-x}$
 - C. $f(x) \geq 1$
 - D. 函数 $g(x) = f(x) - 6$ 在区间 $(1, 2)$ 上有零点
10. 为提高同学们的科学积极性, 某高中组织进行了一系列的自然物理实验。在某个实验中, 统计同学们得到的实验测量结果 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。已知 $P(-4 < X < -2) < P(2 < X < 4)$, 则
 - A. $\mu > 0$
 - B. $\sigma^2 > 4$
 - C. $P(X > 0) < 0.5$
 - D. $P(X < 0) < 0.5$
11. 记双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 。若 $F_2(2, 0)$, 以 F_1 为圆心、4 为半径的圆与 E 的右支交于 P, Q 两点, 点 M 为 E 上一点, 满足 $F_1M \perp F_2M$, 则
 - A. E 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$
 - B. $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 3
 - C. $|MP| - |MQ| < 4$
 - D. $\cos \angle PF_1Q = \frac{9}{16}$

三、填空题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分。

12. 已知向量 $a = (3, 4)$, $b = (1, x)$, 若 b 在 a 上的投影向量的模为3, 则 $x =$ _____。
13. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{2}{x} + 3$, 若 $f(m) = 4$, 则 $f(-m) =$ _____。
14. 已知 $x > 0, y < 0, x - \frac{1}{x} = 2y - \frac{2}{y} + 8$, 则 $x - 2y$ 的最小值为 _____。

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知函数 $f(x) = \tan(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称.
- (1) 求 $f(0)$;
- (2) 探究在区间 $(-\pi, \pi)$ 上有几条平行于 y 轴且被曲线 $y = f(x)$ 无限逼近的直线.

16. (15 分) 2025 年是中国人民抗日战争暨世界反法西斯战争胜利 80 周年, 某校以“铭记历史、缅怀先烈、珍视和平、开创未来”为主题举行纪念活动. 为了解男、女同学对该活动的兴趣程度, 对多位该校同学进行了调查, 并将结果整理为如下列联表, 其中 a 为正整数.

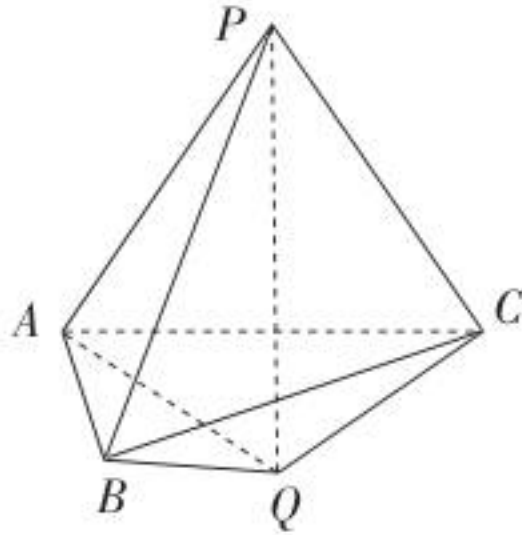
	参加	不参加	合计
男生	$3a$	$2a$	$5a$
女生	$8a$	$2a$	$10a$
合计	$11a$	$4a$	$15a$

- (1) 若根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为是否参加该活动与性别有关, 求 a 的最小值;
- (2) 若 $a = 1$, 从参与调查且参加活动的同学中每次随机不放回地选 1 人, 直到选中女生为止, 求总选取次数 X 的分布列和数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.025	0.010	0.001
χ_{α}	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

17. (15 分) 如图, 在四棱锥 $B-APCQ$ 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle APC$ 均为等边三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 $APCQ$, 点 P 与点 Q 在平面 ABC 的异侧, $AQ = CQ$.



- (1) 证明: $PQ \perp$ 平面 ABC ;
- (2) 若 A, P, C, Q 四点共圆, 求平面 PAB 与平面 QBC 夹角的余弦值.

18. (17 分) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, T_n 为数列 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $2S_n + a_n = 3^n$.
- (1) 证明: $\{4a_n - 3^n\}$ 为等比数列;
- (2) 求 S_n ;
- (3) 求 T_n .

19. (17 分) 已知函数 $f(x) = a(2x-3)e^x + x^2 - x$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 有唯一零点 x_0 .
- (i) 求实数 a 的取值范围;
- (ii) 若 x_1 为 $f(x)$ 的极小值点, 证明: $x_0 - x_1 > \frac{1}{2}$.

四川大数据智学领航联盟2025—2026 学年高三 秋季入学摸底考试 数学参考答案及评分细则

1. 【答案】A

【解析】由全称量词命题的否定为存在量词命题可知 $\neg p: \exists x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2025 \notin \mathbf{N}^*$. 故选 A.

2. 【答案】C

【解析】不妨设 $z = a + bi, a < 0, b > 0$, 则 $zi = (a + bi)i = -b + ai$, 所以 zi 在复平面内对应的点位于第三象限. 故选 C.

3. 【答案】D

【解析】由抛物线的定义可得 $\frac{p}{2} = 8$, 解得 $p = 16$, 故 C 的方程为 $y^2 = 32x$, 将 $Q(2, n)$ 代入 C 的方程可得 $n = 8$ (负值舍去). 故选 D.

4. 【答案】B

【解析】易得样本数据的极差为 $6.3 - 5.8 = 0.5$, 由于 $8 \times 0.7 = 5.6$, 故样本数据的第 70 百分位数为 6.1, 其差为 $0.5 - 6.1 = -5.6$. 故选 B.

5. 【答案】C

【解析】由 $\frac{4}{3-x} \geq 1$ 可得 $\frac{4-(3-x)}{3-x} \geq 0$, 即 $\frac{1+x}{3-x} \geq 0$, 即 $\begin{cases} (1+x)(3-x) \geq 0, \\ 3-x \neq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x < 3$. 于是 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 共 4 个元素, 故其非空真子集个数为 $2^4 - 2 = 14$ 个. 故选 C.

6. 【答案】D

【解析】由 $\begin{cases} 2A = B + C, \\ A + B + C = \pi \end{cases}$ 可得 $A = \frac{\pi}{3}$. 显然 $\sin C > 0$, 故 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, 于是 $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C +$

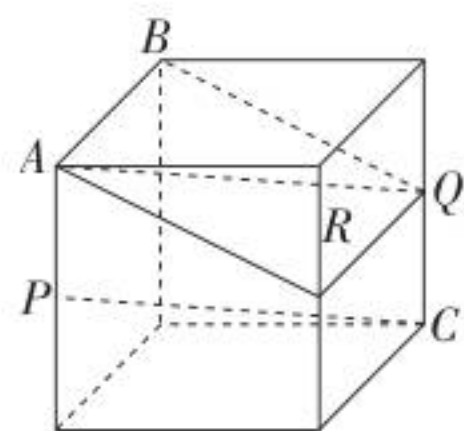
$\sin C \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$. 在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$, 故 $BC = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{56}{5}$. 故选 D.

7. 【答案】C

【解析】当 $x < 0$ 时, 若 $f(x)$ 单调递增, 则对称轴 $x = -\frac{2a}{2 \times (-1)} = a$ 应当与 y 轴重合或在 y 轴右侧, 所以 $a \geq 0$; 当 $x \geq 0$ 时, 要使函数 $f(x) = 3e^x - bx$ 单调递增, 则 $f'(x) = 3e^x - b \geq 0$, 解得 $b \leq 3$. 考虑断点 $x = 0$ 处的状态, 则有 $a \leq 3$, 故 $a \in [0, 3], b \in (-\infty, 3]$, 所以 $a + b$ 的最大值为 6. 故选 C.

8. 【答案】C

【解析】如图, 设 Q, R 为所在棱的中点, 则有 $AQ \parallel PC$, 则经过点 A, B, Q 三点的平面即为符合题意的平面 α , 则平面 α 截正方体所得图形为矩形 $ABQR$, 其中 $AB = 2, BQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 故 $AQ = \sqrt{AB^2 + BQ^2} = 3$, 所以平面 α 截正方体所得图形的外接圆面积为 $\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$. 故选 C.



9. 【答案】ACD(每选对1个得2分)

【解析】 $f(-1)=f(1)=e+2>4$,故A正确;当 $x<0$ 时, $f(x)=f(-x)=2^{-x}-xe^{-x}$,故B错误;当 $x\geq 0$ 时, $xe^x\geq 0,2^x\geq 1$,此时 $f(x)=2^x+xe^x\geq 1$,当 $x<0$ 时, $f(x)=f(-x)>1$,故 $f(x)\geq 1$,故C正确;注意到 $g(1)=f(1)-6=e-4<0, g(2)=f(2)-6=2e^2-2>0$,故 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有零点,故D正确. 故选ACD.

10. 【答案】AD(每选对1个得3分)

【解析】由于 $P(-4<X<-2)<P(2<X<4)$,且 $-4<X<-2$ 与 $2<X<4$ 的覆盖区间长度相同,则 $X=2$ 比 $X=-2$ 更接近正态曲线的对称轴 $X=\mu$,故 $\mu>0$,故A正确;由 $P(-4<X<-2)<P(2<X<4)$ 无法得知 σ^2 与4的大小,故B错误;由于 $\mu>0$,故 $P(X>0)>P(X>\mu)=0.5$,故C错误;同理可得 $P(X<0)<P(X<\mu)=0.5$,故D正确. 故选AD.

11. 【答案】BC(每选对1个得3分)

【解析】易知 $a^2+3=2^2$,解得 $a=1$,故E的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$,故A错误;由对称性,不妨令 $|MF_1|=t, |MF_2|=t+2$,而 $|F_1F_2|=4$,故 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2$,即 $t^2+(t+2)^2=16$,得 $t(t+2)=6$,于是 $\triangle MF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot |MF_1|\cdot |MF_2|=\frac{t(t+2)}{2}=3$,故B正确;易知该圆的方程为 $(x+2)^2+y^2=16$,联立

$$\begin{cases} (x+2)^2+y^2=16, \\ 3x^2-y^2=3, \end{cases} \text{ 可得 } 4x^2+4x-15=0, \text{ 故 } x=-\frac{5}{2} \text{ (舍去) 或 } x=\frac{3}{2}, \text{ 代入 } x^2-\frac{y^2}{3}=1 \text{ 可得 } y^2=3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=\frac{15}{4}, \text{ 不妨}$$

令P在第一象限,则 $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$,显然 $|PQ|=\sqrt{15}$. 由B知M与P,Q不重合,而在 $\triangle MPQ$ 中,

$|MP|-|MQ|<|PQ|<4$,故C正确;显然 $|PF_1|=|QF_1|=4$,故由余弦定理可得 $\cos \angle PF_1Q =$

$$\frac{|PF_1|^2+|QF_1|^2-|PQ|^2}{2\cdot |PF_1|\cdot |QF_1|}=\frac{16+16-15}{2\times 4\times 4}=\frac{17}{32}, \text{ 故D错误. 故选BC.}$$

12. 【答案】3或-4.5

【解析】b在a上的投影向量的模为 $\frac{a\cdot b}{|a|}=\frac{3\times 1+4x}{5}=\frac{3+4x}{5}=3$,解得 $x=3$ 或 $x=-4.5$.

13. 【答案】2

【解析】由诱导公式易得 $f(x)=\sin x-\frac{2}{x}+3$,且 $f(m)=\sin m-\frac{2}{m}+3=4$,所以 $\sin m-\frac{2}{m}=1$,则 $f(-m)=\sin(-m)-$

$$\frac{2}{-m}+3=-\left(\sin m-\frac{2}{m}\right)+3=-1+3=2.$$

14. 【答案】9

【解析】由 $x-\frac{1}{x}=2y-\frac{2}{y}+8$,得 $x-2y=\frac{1}{x}-\frac{4}{2y}+8$,两边同乘 $x-2y$ 得 $(x-2y)^2=\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{2y}+8\right)(x-2y)$,即 $(x-2y)^2-$

$$8(x-2y)=5-\frac{2y}{x}-\frac{4x}{2y}. \text{ 又由 } -\frac{2y}{x}-\frac{4x}{2y}\geq 2\sqrt{\frac{-2y}{x}\cdot\frac{4x}{-2y}}=4, \text{ 当且仅当 } \frac{-2y}{x}=\frac{2x}{-y}, \text{ 即 } x=-y \text{ 时等号成立,则有 } (x-2y)^2-$$

$8(x-2y)-9\geq 0$,解得 $x-2y\geq 9$ (负值已舍),当且仅当 $x=3, y=-3$ 时取等号,所以 $x-2y$ 的最小值为9.

15. 解:(1)由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称,可得 $\frac{4\pi}{3} + \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, (2 \text{ 分})$

解得 $\varphi = -\frac{4\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, (3 \text{ 分})$

又因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}, (4 \text{ 分})$

故 $f(0) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}. (5 \text{ 分})$

(2)平行于 y 轴且被曲线 $y=f(x)$ 无限逼近的直线的方程为 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, (8 \text{ 分})$

解得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, (9 \text{ 分})$

由 $-\pi < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} < \pi, k \in \mathbf{Z}$,得 $k = -2, -1, 0, 1$,共4个取值, (12分)

所以在区间 $(-\pi, \pi)$ 上有4条平行于 y 轴且被曲线 $y=f(x)$ 无限逼近的直线. (13分)

【评分细则】

第二问如果考生利用换元法去根据正切函数的图象和性质判断出直线的条数也给满分.

16. 解:(1)若根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验,认为是否参加该活动与性别有关,

则 $\chi^2 = \frac{15a}{22} \geq 6.635, (3 \text{ 分})$

解得 $a \geq \frac{22 \times 6.635}{15} \approx 9.7. (5 \text{ 分})$

因为 a 为正整数,所以 a 的最小值为10. (7分)

(2)当 $a=1$ 时,参与调查且参加活动的同学中共有男生3名,女生8名,

故总选取次数 X 的可能取值有1,2,3,4, (8分)

且 $P(X=1) = \frac{8}{11}, P(X=2) = \frac{3}{11} \times \frac{8}{10} = \frac{24}{110} = \frac{12}{55},$

$P(X=3) = \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{48}{990} = \frac{8}{165}, P(X=4) = \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{8} = \frac{6}{990} = \frac{1}{165}, (12 \text{ 分})$

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{8}{11}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{8}{165}$	$\frac{1}{165}$

(13分)

所以 $E(X) = \frac{8}{11} + 2 \times \frac{12}{55} + 3 \times \frac{8}{165} + 4 \times \frac{1}{165} = \frac{4}{3}. (15 \text{ 分})$

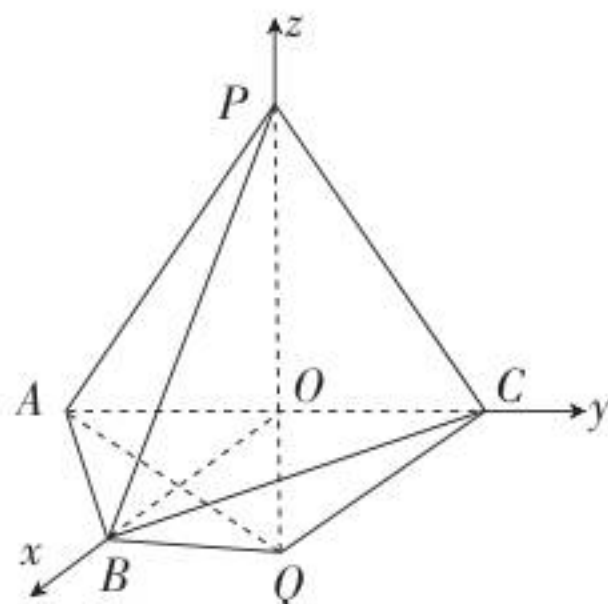
【评分细则】

第二问的概率值无论是否化为最简值都给分.

17. (1) 证明: 在平面 $APCQ$ 中, 由 $AQ=CQ, AP=CP$ 可知 PQ 是 AC 的中垂线,
故 $PQ \perp AC$, (2 分)

而平面 $ABC \perp$ 平面 $APCQ$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $APCQ = AC, PQ \subset$ 平面 $APCQ$,
故 $PQ \perp$ 平面 ABC . (4 分)

(2) 解: 记 O 为 AC 的中点, 由 A, P, C, Q 四点共圆可知 $\angle APC + \angle AQC = \pi$,



而 $\angle APC = \frac{\pi}{3}$, 故 $\angle AQC = \frac{2\pi}{3}$. (6 分)

不妨令 $OQ=1$, 易知 $OP \perp OB, OP \perp OC, OB \perp OC$, 故以 O 为坐标原点, OB, OC, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立
如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$, (7 分)

则 $Q(0, 0, -1), A(0, -\sqrt{3}, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), B(3, 0, 0), P(0, 0, 3)$,

故 $\vec{AB} = (3, \sqrt{3}, 0), \vec{AP} = (0, \sqrt{3}, 3), \vec{CB} = (3, -\sqrt{3}, 0), \vec{QC} = (0, \sqrt{3}, 1)$. (9 分)

记平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AP} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \\ \sqrt{3}y_1 + 3z_1 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{n}_1 = (1, -\sqrt{3}, 1), \text{ (11 分)}$$

记平面 QBC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{CB} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \vec{QC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3x_2 - \sqrt{3}y_2 = 0, \\ \sqrt{3}y_2 + z_2 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{3}, -3). \text{ (13 分)}$$

记平面 PAB 与平面 QBC 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{13}$. (15 分)

【评分细则】

第二问利用几何法计算, 过程、结果正确均给分.

18. (1) 证明: 由 $2S_n + a_n = 3^n$, 得 $2S_{n+1} + a_{n+1} = 3^{n+1}$,

两式相减得 $2S_{n+1} - 2S_n + a_{n+1} - a_n = 2 \times 3^n$, (1 分)

即 $3a_{n+1} = a_n + 2 \times 3^n$. (2 分)

当 $n=1$ 时, $2a_1 + a_1 = 3$, 解得 $a_1 = 1$, 故 $4a_1 - 3 = 1 \neq 0$. (3 分)

$$\text{于是 } \frac{4a_{n+1} - 3^{n+1}}{4a_n - 3^n} = \frac{\frac{4}{3}(a_n + 2 \times 3^n) - 3^{n+1}}{4a_n - 3^n} = \frac{\frac{1}{3}(4a_n - 3^n)}{4a_n - 3^n} = \frac{1}{3}, \text{ (4 分)}$$

故 $\{4a_n - 3^n\}$ 是首项为 1、公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. (5 分)

(2) 解: 由 (1) 可知 $4a_n - 3^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, (6 分)

$$\text{故 } a_n = \frac{1}{4} \times 3^n + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, (7 \text{ 分})$$

$$\text{于是 } 2S_n = 3^n - a_n = \frac{3}{4} \left[3^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right], S_n = \frac{3}{8} \left[3^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]. (10 \text{ 分})$$

(3) 解: 设 $x_n = n \cdot 3^n, y_n = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 的前 n 项和分别为 X_n, Y_n .

$$\text{则 } X_n = 1 \times 3^1 + \cdots + n \cdot 3^n, 3X_n = 1 \times 3^2 + \cdots + (n-1) \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1},$$

$$\text{两式相减得 } 2X_n = n \cdot 3^{n+1} - (3 + \cdots + 3^n) = n \cdot 3^{n+1} - \frac{3^{n+1} - 3}{3-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{2}, (12 \text{ 分})$$

$$\text{则 } X_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{4}.$$

$$Y_n = 1 \times \frac{1}{3} + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, \frac{1}{3}Y_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{2}{3}Y_n = \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} - n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} - \left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, (14 \text{ 分})$$

$$\text{故 } Y_n = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, (15 \text{ 分})$$

$$\text{则 } T_n = \frac{3}{8}(X_n - Y_n) = \frac{1}{32} \left[(2n-1) \cdot 3^{n+2} + (2n+3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]. (17 \text{ 分})$$

【评分细则】

第二问也可以利用等比数列求和公式来求解 S_n , 只要最终结果正确均给分.

19. (1) 解: 当 $a=1$ 时, $f(x) = (2x-3)e^x + x^2 - x$, (1 分)

$$\text{则 } f'(x) = (2x-1)e^x + 2x-1, (2 \text{ 分})$$

$$\text{又 } f(0) = -3, f'(0) = -2, (3 \text{ 分})$$

所以所求切线方程为 $y+3 = -2x$, 即 $2x+y+3=0$. (4 分)

(2) (i) 解: 由题意得 $f'(x) = (2x-1)(ae^x+1)$,

若 $a \geq 0$, 则 $ae^x+1 > 0$,

故当 $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. (5 分)

$$\text{又 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -2a\sqrt{e} - \frac{1}{4} < 0, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0,$$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $a(2x-3)e^x \rightarrow 0, x^2-x \rightarrow +\infty$, 所以 $f(x) \rightarrow +\infty$.

由单调性和零点存在性定理可知, 此时 $f(x)$ 有两个零点, 不符合题意; (6 分)

若 $a < 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -\ln(-a)$,

① 当 $\frac{1}{2} < -\ln(-a)$, 即 $-\frac{\sqrt{e}}{e} < a < 0$ 时,

有当 $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, -\ln(-a)\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-\ln(-a), +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; (7 分)

又 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 故在区间 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上必有一个零点,

要使 $f(x)$ 有唯一零点, 只需 $f(x)_{\text{极小值}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2a\sqrt{e} - \frac{1}{4} > 0$, 即 $-\frac{\sqrt{e}}{e} < a < -\frac{\sqrt{e}}{8e}$. (8 分)

② 当 $\frac{1}{2} = -\ln(-a)$, 即 $a = -\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 单调递减,

$f(x)$ 仅有一个零点显然成立. (9 分)

③ 当 $\frac{1}{2} > -\ln(-a)$, 即 $a < -\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时,

有当 $x \in (-\infty, -\ln(-a))$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; $x \in \left(-\ln(-a), \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in$

$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. (10 分)

由 $f(x)_{\text{极小值}} = f(-\ln(-a)) = (\ln(-a))^2 + 3\ln(-a) + 3 > 0$ 恒成立, 故同理 $f(x)$ 也仅有一个零点.

综上, a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{e}}{8e}\right)$. (11 分)

(ii) 证明: 解法一: 由 (i) 知若 $-\frac{\sqrt{e}}{e} < a < -\frac{\sqrt{e}}{8e}$, 极小值点 $x_1 = \frac{1}{2}$, 零点 $x_0 > \frac{3}{2}$, 此时 $x_0 - x_1 > 1 > \frac{1}{2}$ 成立; (12 分)

若 $a < -\frac{\sqrt{e}}{e}$, 极小值点 $x_1 = -\ln(-a)$, 零点 x_0 满足 $f(x_0) = a(2x_0 - 3)e^{x_0} + x_0^2 - x_0 = 0$,

即 $a = -\frac{x_0^2 - x_0}{(2x_0 - 3)e^{x_0}}$, (13 分)

此时 $x_0 - x_1 = x_0 + \ln(-a) = x_0 + \ln \frac{x_0^2 - x_0}{(2x_0 - 3)e^{x_0}} = \ln x_0 + \ln(x_0 - 1) - \ln(2x_0 - 3)$, 且 $x_0 > \frac{3}{2}$.

令 $g(x) = \ln x + \ln(x - 1) - \ln(2x - 3)$, $x > \frac{3}{2}$, (14 分)

$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-3} = \frac{2x^2 - 6x + 3}{x(x-1)(2x-3)}$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$,

当 $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, (15 分)

当 $x \in \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, (16 分)

故 $g(x)_{\min} = g\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) = \ln \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{7}{4} + \sqrt{3}\right) > \frac{1}{2}$, 故 $x_0 - x_1 > \frac{1}{2}$.

综上, $x_0 - x_1 > \frac{1}{2}$. (17 分)

解法二: 由 (i) 知若 $-\frac{\sqrt{e}}{e} < a < -\frac{\sqrt{e}}{8e}$, 极小值点 $x_1 = \frac{1}{2}$, 零点 $x_0 > \frac{3}{2}$, 此时 $x_0 - x_1 > 1 > \frac{1}{2}$ 成立; (12 分)

若 $a < -\frac{\sqrt{e}}{e}$, 则 $x_1 = -\ln(-a) < \frac{1}{2}$. (14 分)

因为 $x_0 > \frac{3}{2}$, 所以 $x_0 - x_1 > 1 > \frac{1}{2}$. (16 分)

综上, $x_0 - x_1 > \frac{1}{2}$. (17 分)

【评分细则】

如用其他解法若正确也给满分.