

2026 届高三年级 9 月份联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. A 【解析】 $\sin 600^\circ = \sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故

选 A.

2. B 【解析】取 $a = -2, b = 1$ 知 “ $|a| > b$ ” 无法推出 “ $a > b$ ”, 但由 “ $|a| \geq a$ ” 可知 “ $a > b$ ” 可以推出 “ $|a| > b$ ”, 于是 “ $|a| > b$ ” 是 “ $a > b$ ” 的必要不充分条件. 故选 B.

3. D 【解析】 $z = -2i^3 + 13i^4 = 13 + 2i$, 于是 z 的虚部是 2. 故选 D.

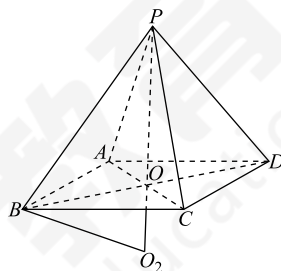
4. C 【解析】由 $\left\{m, \frac{n}{m}, 1\right\} = \{m^2, m+n, 0\}$ 以及 $m \neq 0$ 可知 $n = 0$, 于是 $m^2 = 1$, 由互异性得 $m = -1$, 于是 $m^{2025} + n^{2025} = -1$. 故选 C.

5. A 【解析】设公比为 q , 则 $T_2 = a_1^2 q = \frac{1}{8}, T_4 = a_1^4 q^6 = \frac{1}{4}$, 解得 $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = 2$, 于是 $T_6 = a_1^6 q^{15} = 8$. 故选 A.

6. D 【解析】 $f(x) = \frac{\ln x + 4x}{x} = \frac{\ln x}{x} + 4, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 于是 $f(x) = \frac{\ln x + 4x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, $(e, +\infty)$ 上单调递减, 于是 $f(e) > f(3) > f(4) = f(2)$. 故选 D.

7. C 【解析】设四棱锥为 $P-ABCD$, 底面 $ABCD$ 的中心为 O , 外接球的球心为 O_2 , 则 $OO_2 = 2, OB =$

$\sqrt{O_2 B^2 - OO_2^2} = 4\sqrt{2}, BC = \sqrt{2} OB = 8, PB = \sqrt{OB^2 + OP^2} = 4\sqrt{3}$, 易求得 $S_{\triangle PBC} = 16\sqrt{2}, S_{\text{正方形 } ABCD} = 64, S_{\text{表面积}} = S_{\text{正方形 } ABCD} + 4S_{\triangle PBC} = 64(\sqrt{2} + 1)$. 故选 C.



8. B 【解析】 $h'(x) = ae^x - x + 1$, 若函数 $h(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 上不单调, 则 $h'(x)$ 在 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 上有变号零点, 令 $h'(x) = 0$ 得 $a = \frac{x-1}{e^x}$, 令 $f(x) = \frac{x-1}{e^x}, x \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$, 则 $f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$, 当 $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (2, 3)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 故 $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{1}{e^2}$, 又 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}} > f(3) = \frac{2}{e^3}$, 所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{2}{e^3}, \frac{1}{e^2}\right)$. 故选 B.

二、选择题

9. AB 【解析】向量 a 在向量 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b = -5b = (5, 0)$, 故选项 A、B 正确, 选项 C、D 错误. 故选 AB.

数学

参考答案及解析

10. ACD 【解析】由图可知 $10(2a+3a+3a+6a+5a+a)=1$, 解得 $a=0.005$, 故选项 A 正确; 估计成绩低于 50 分的有 $2\,000 \times 10 \times 2a = 200$ 人, 故选项 B 错误; 这组数据的众数为 75, 故选项 C 正确; 由于 $10(2a+3a+3a+6a)=0.7$, 可知这组数据的第 75 百分位数为 $80 + \frac{0.05}{0.25} \times 10 = 82$, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

11. ABC 【解析】由 $x = -\sqrt{b}$ 为函数 $f(x)$ 的零点, 由三次函数图象可知 $x = -\sqrt{b}$ 必为极小值点, 故 $a = -\sqrt{b}$, 故 $b = a^2$, 故选项 A 正确; 由 A 可知 $f(x) = -(x-a)(x^2-a^2)$, $f'(x) = -(3x^2-2ax-a^2) = -(3x+a)(x-a)$, $\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 和 $(-\frac{a}{3}, +\infty)$ 递减, 在区间 $(a, -\frac{a}{3})$ 递增, $x=a$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 故选项 B 正确; 由 B 可知, $x = -\frac{a}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 要使方程 $f(x) = b = a^2$ 有 3 个不同的实数根, 则 $f(a) < a^2 < f(-\frac{a}{3})$, 解得 $a < -\frac{27}{32}$, 故选项 C 正确; $f(x) = -(x^3 - ax^2 - a^2x + a^3)$, $f(x+t) = -[(x+t)^3 - a(x+t)^2 - a^2(x+t) + a^3]$, $\therefore f(x) - f(x+t) = t[3x^2 + (3t-2a)x + t^2 - at - a^2] \geq 0$ 恒成立, 显然当 $t=0$ 时, 成立; 显然当 $t < 0$ 时, 不恒成立; $\therefore$ 当 $t > 0$ 时, 即 $y = 3x^2 + (3t-2a)x + t^2 - at - a^2 \geq 0$ 恒成立, $\therefore \Delta = (3t-2a)^2 - 12(t^2 - at - a^2) \leq 0$ 恒成立, $\therefore t \geq -\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ 或 $t=0$, 故选项 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题

12. -21 【解析】 $T_{k+1} = C_7^k \left(\frac{1}{x}\right)^{7-k} (-x)^k = (-1)^k C_7^k x^{2k-7}$, 令 $2k-7=3$ 得 $k=5$, 则系数为 $(-1)^5 C_7^5 = (-1)^5 C_7^2 = (-1)^5 \frac{7 \times 6}{2} = -21$. 故答案为 -21.

13. $\frac{1}{9}$ 【解析】由题意知本题是一个等可能事件, 试验发生包含的事件是两个人各有 9 种不同的方法, 共有 81 种结果, 满足条件的事件是可以从每一层下, 共有 9 种结果, 则两个人在同一层离开电梯的概率是 $\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$. 故答案为 $\frac{1}{9}$.

14. $\sqrt{17}$ 【解析】由 $x^2 + y^2 = 9$, 得 $T = \sqrt{10-2x} + \sqrt{25-8y} = \sqrt{x^2+y^2-2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-8y+16} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-4)^2}$, $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ 表示 $P(x, y)$, $A(1, 0)$ 两点之间的距离, $\sqrt{x^2+(y-4)^2}$ 表示 $P(x, y)$, $B(0, 4)$ 两点之间的距离, 则 $T = |PA| + |PB| \geq |AB| = \sqrt{17}$, 当且仅当 A, P, B 三点共线, 且 P 在线段 AB 上时, 取等号, 所以 $T = \sqrt{10-2x} + \sqrt{25-8y}$ 的最小值为 $\sqrt{17}$. 故答案为 $\sqrt{17}$.

四、解答题

15. 解: (1) 零假设为 H_0 : 满意情况与游客的来源无关.

(1 分)

$$\begin{aligned} \text{因为 } \chi^2 &= \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \\ &= \frac{400 \times (80 \times 140 - 120 \times 60)^2}{200 \times 200 \times 260 \times 140} \approx 4.396 < 6.635, \end{aligned}$$

(3 分)

根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即满意情况与游客的来源无关. (5分)

(2)根据分层抽样的性质可知:选出5人中,满意人数为 $5 \times \frac{120}{80+120} = 3$,不满意人数为 $5-3=2$, (6分)

由题意可知: $X=1, 2, 3$, (7分)

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_2^0}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \quad (10分)$$

所以这3人中满意人数 X 的概率分布列为:

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

(11分)

$$E(X) = \frac{3}{10} \times 1 + \frac{3}{5} \times 2 + \frac{1}{10} \times 3 = \frac{9}{5}. \quad (13分)$$

16. 解:(1)法一:设点 (x_0, y_0) 在 $f(x)$ 上,

则由 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称可知点 $(-2-x_0, y_0)$ 在 $g(x)$ 上, (3分)

$$\begin{aligned} \text{即 } y_0 &= \frac{(-2-x_0)-1}{(-2-x_0)+1} \ln(-2-x_0) \\ &= \frac{x_0+3}{x_0+1} \ln(-2-x_0), \end{aligned} \quad (6分)$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{x+3}{x+1} \ln(-2-x), (x < -2). \quad (7分)$$

法二:因为 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于直线

$x=-1$ 对称,所以 $g(-1-x)=f(-1+x)$.

(2分)

$$\text{又因为 } g(-1-x) = \frac{(-1-x)-1}{(-1-x)+1} \ln(-1-x) =$$

$$\frac{(2+x)}{x} \ln(-1-x), \quad (3分)$$

$$\text{所以 } f(-1+x) = \frac{(2+x)}{x} \ln(-1-x), \quad (4分)$$

令 $t=-1+x$, 则 $x=t+1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(t) &= \frac{2+(t+1)}{t+1} \ln(-1-(t+1)) \\ &= \frac{t+3}{t+1} \ln(-2-t), \end{aligned} \quad (6分)$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{x+3}{x+1} \ln(-2-x), (x < -2). \quad (7分)$$

(2)证明:由 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称可知,要证 $f(x) \geq 0$, 即证 $g(x) \geq 0$.

(10分)

法一:当 $x \geq 1$ 时, $x-1 \geq 0$, $x+1 > 0$ 且 $\ln x \geq 0$, 此

$$\text{时 } g(x) = \frac{(x-1)}{x+1} \ln x \geq 0; \quad (12分)$$

当 $0 < x < 1$ 时, $x-1 < 0$, $x+1 > 0$ 且 $\ln x < 0$, 此时

$$g(x) = \frac{(x-1)}{x+1} \ln x > 0, \quad (14分)$$

综上, $g(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq 0$. (15分)

$$\text{法二: } g'(x) = \frac{x-\frac{1}{x}+2\ln x}{(x+1)^2}, \text{ 令 } \varphi(x) = x - \frac{1}{x} + 2\ln x,$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

故 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, (12分)

因此当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$; 当 $x > 0$ 时,

$$\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0;$$

因此 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } g(x) \geq g(1) = 0. \quad (14 \text{ 分})$$

$$\text{于是 } f(x) \geq 0. \quad (15 \text{ 分})$$

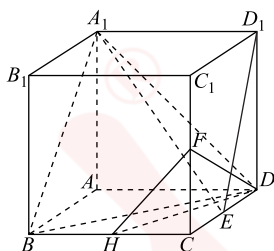
17. 解: (1) 由 $CD \parallel C_1D_1$, $CD \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $C_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 可得 $CD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, (2 分)

故 E 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离为 $DD_1 = 2$. (3 分)

$$\text{于是 } V_{D_1-A_1B_1E} = V_{E-D_1A_1B_1} = V_{D-D_1A_1B_1} = \frac{1}{3} \cdot DD_1$$

$$\cdot S_{\triangle D_1A_1B_1} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}. \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 法一: 如图, 取 CC_1 的中点为 F , 取 BC 的中点为 H , 连接 DH, DF, HF, D_1E ,



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 可得 $\angle D_1DE = \angle DCF$, $DD_1 = CD$,

又 E, F 分别为 CD, CC_1 的中点,

所以 $DE = CF$, 故 $\triangle D_1DE \cong \triangle DCF$, 则 $\angle FDC = \angle ED_1D$,

因为 $\angle D_1ED + \angle ED_1D = 90^\circ$, 所以 $\angle D_1ED + \angle FDC = 90^\circ$,

所以 D_1E 与 DF 夹角为 90° , 即 $D_1E \perp DF$.

由正方体可得, $A_1D_1 \perp$ 平面 CC_1D_1D ,

因为 $DF \subset$ 平面 CC_1D_1D , 所以 $A_1D_1 \perp DF$,

因为 $A_1D_1, D_1E \subset$ 平面 A_1D_1E , $A_1D_1 \cap D_1E = D_1$, 所以 $DF \perp$ 平面 A_1D_1E ,

因为 $A_1E \subset$ 平面 A_1D_1E , 所以 $DF \perp A_1E$. (8 分)

又由正方体可得 $B_1C \perp HF$, 且 $CD \perp$ 平面 BB_1C_1C ,

因为 $HF \subset$ 平面 BB_1C_1C , 则 $EC \perp HF$,

因为 $B_1C \cap EC = C$, $B_1C, EC \subset$ 平面 A_1B_1CE , 所以 $HF \perp$ 平面 A_1B_1CE .

因为 $A_1E \subset$ 平面 A_1B_1CE , 则 $HF \perp A_1E$, (10 分)

因为 $HF, DF \subset$ 平面 DHF , $HF \cap DF = F$, 则 $A_1E \perp$ 平面 DHF ,

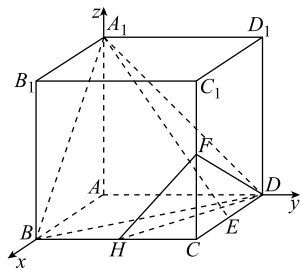
故 $\triangle DHF$ 即为过点 D 且与 A_1E 垂直的平面截正方体的截面. (12 分)

由正方体棱长为 2 易得 $DH = \sqrt{5}$, $DF = \sqrt{5}$, $FH = \sqrt{2}$,

在 $\triangle DHF$ 中, $\cos \angle HDF = \frac{4}{5}$, $\sin \angle HDF = \frac{3}{5}$, (13 分)

$$\text{则 } S_{\triangle DHF} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2}. \quad (15 \text{ 分})$$

法二: 如图, 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$ 为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系 $Axyz$,



则 $D(0, 2, 0)$, $A_1(0, 0, 2)$, $E(1, 2, 0)$, $\overrightarrow{A_1E} = (1, 2, -2)$, (6 分)

设 CC_1 上有一点 $F(2, 2, a)$ ($0 < a < 2$) 在过点 D 且

与 A_1E 垂直的平面上, 则由 $\overrightarrow{DF} = (2, 0, a)$, 可得 $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{A_1E} = 2 - 2a = 0$, 可得 $a = 1$, 故 $F(2, 2, 1)$, (8 分)
同理可在其他棱上解得只有点 $H(2, 1, 0)$ 满足条件, (10 分)

故 $\triangle DHF$ 即为过点 D 且与 A_1E 垂直的平面截正方体的截面. (12 分)

由正方体棱长为 2 易得 $DH = \sqrt{5}$, $DF = \sqrt{5}$, $FH = \sqrt{2}$,

在 $\triangle DHF$ 中, $\cos \angle HDF = \frac{4}{5}$, $\sin \angle HDF = \frac{3}{5}$,

则 $S_{\triangle DHF} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$. (15 分)

18. 解: (1) 令 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0$, 得 $\omega x -$

$$\frac{2}{3}\pi = 2k\pi + \frac{1}{6}\pi \text{ 或 } \omega x - \frac{2}{3}\pi = 2k\pi + \frac{5}{6}\pi, k \in \mathbf{N},$$

又由 $a_1 = \frac{5}{6}$ 可得 $\frac{5}{6}\omega - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$, 于是 $\omega = \pi$.

(3 分)

(2) 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi x - \frac{2}{3}\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解

得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{6} + 2k, \frac{7}{6} + 2k\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上是增函数;

由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi x - \frac{2}{3}\pi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $f(x)$

在 $\left[\frac{7}{6} + 2k, \frac{13}{6} + 2k\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上是减函数. (6 分)

所以 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{7}{6}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{7}{6}, 2\right)$ 上单调递减. (8 分)

综上所述, $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[\frac{1}{6} + 2k, \frac{7}{6} + 2k\right]$

$(k \in \mathbf{Z})$. 且 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{7}{6}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{7}{6}, 2\right)$

上单调递减. (9 分)

(3) 由 (1) 知 $\{a_n\}$ 的奇数项为以 $a_1 = \frac{5}{6}$ 为首项, $T =$

2 为公差的等差数列, 偶数项为以 $a_2 = \frac{3}{2}$ 为首项,

$T = 2$ 为公差的等差数列, (12 分)

$$\text{于是 } a_n = \begin{cases} n - \frac{1}{6}, & n \text{ 为奇数} \\ n - \frac{1}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, \quad (14 \text{ 分})$$

当 n 为偶数时, $S_n = \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_2 + a_{n-1} + a_n)}{2} =$

$$\frac{3n^2 + n}{6}, \quad (15 \text{ 分})$$

当 n 为奇数时, $S_n = S_{n+1} - a_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3(n+1)^2 + (n+1)}{6} - \left[(n+1) - \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{3n^2 + n + 1}{6}, \end{aligned} \quad (16 \text{ 分})$$

$$\text{综上所述, } S_n = \begin{cases} \frac{3n^2 + n + 1}{6}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{3n^2 + n}{6}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}. \quad (17 \text{ 分})$$

19. 解: (1) 由 $S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} OD \cdot OE \cdot \sin \angle DOE = 4$ 及

$OD = 5, OE = 2$, 可得 $\sin \angle DOE = \frac{4}{5}$. (2 分)

(2) (i) 以 O 为原点, 锐角 $\angle DOE$ 的角平分线为 x

轴建立平面直角坐标系, 设 OD 倾斜角为 $\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$,

则 $2\theta = \angle DOE$, 由 $\sin 2\theta = \frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$,

解得 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ (舍去 2), (4 分)

数学

参考答案及解析

则可设 $A\left(a, \frac{1}{2}a\right), B\left(b, -\frac{1}{2}b\right)$, 于是 $M(a, 0)$,

$$N(b, 0), S_{\triangle AOM} + S_{\triangle BON} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{b}{2}$$

$$= \frac{1}{2}, \text{ 于是 } a^2 + b^2 = 2. \quad (5 \text{ 分})$$

法一: 由四边形 $OARB$ 为平行四边形可知 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$,

故 R 点坐标为 $(x, y) = \left(a + b, \frac{a-b}{2}\right)$, 于是 $\frac{x^2}{4} + y^2$

$$= \frac{2(a^2 + b^2)}{4} = 1,$$

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (7 分)

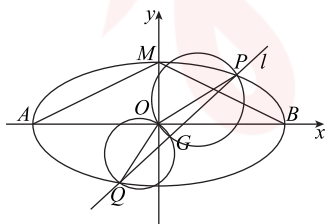
法二: 可设 $a = \sqrt{2} \cos \alpha, b = \sqrt{2} \sin \alpha$, 由四边形 $OARB$ 为平行四边形可知 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 故 R 点坐标为

$(x, y) = (\sqrt{2}(\cos \alpha + \sin \alpha), \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha))$, 于是

$$\begin{cases} x + 2y = 2\sqrt{2} \cos \alpha \\ x - 2y = 2\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}, \text{ 平方相加可得 } (x + 2y)^2 + (x - 2y)^2 = 8,$$

化简可得 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (7 分)

(ii) 如图, 因为以线段 OP, OQ 为直径的圆相交于异于原点的点 G ,



根据直径所对的圆周角为 90° 得到 P, G, Q 三点共线, 且 $OG \perp PQ$. (9 分)

因为 $|OG| = 1$, 所以原点 O 到直线 l 的距离为 1.

(10 分)

当直线 l 斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = -1$ 或 $x = 1$.

当 $l: x = 1$ 时, 不妨设 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), Q\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

则 $|PQ| = \sqrt{3}$, 当 $l: x = -1$ 时, 同理 $|PQ| = \sqrt{3}$.

(11 分)

当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 即 $kx - y + m = 0$.

所以原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 则 $k^2 +$

$$1 = m^2.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{ 消元得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0,$$

$$4(m^2 - 1) = 0,$$

则 $\Delta = (8km)^2 - 4 \times 4(m^2 - 1)(4k^2 + 1) > 0$, 即 $k^2 > 0$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}$,

$$x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{4k^2 + 1},$$

由 $k^2 + 1 = m^2$, 得 $k^2 = m^2 - 1 > 0$,

则 $m^2 > 1$, (14 分)

法一: $|PQ| = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}$

$$= \sqrt{m^2 \left[\left(-\frac{8km}{4k^2 + 1} \right)^2 - 4 \cdot \frac{4(m^2 - 1)}{4k^2 + 1} \right]}$$

$$= 4\sqrt{\frac{3(m^2 - 1)m^2}{(4m^2 - 3)^2}},$$

令 $t = 4m^2 - 3, t > 1$,

$$\text{则 } |PQ| = \sqrt{\frac{3(t + 3)(t - 1)}{t^2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}}$$

$$=\sqrt{3}\sqrt{-3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}.$$

由 $0 < \frac{1}{t} < 1$, 所以当 $\frac{1}{t} = \frac{1}{3}$, 即 $t = 3$ 时, $|PQ|_{\max}$

$= 2$,

综上可知, $|PQ|$ 的最大值为 2. (17 分)

法二: $|PQ| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$$=\sqrt{m^2\left[\left(-\frac{8km}{4k^2+1}\right)^2-4\cdot\frac{4(m^2-1)}{4k^2+1}\right]}$$

$$=4\frac{\sqrt{3(m^2-1)m^2}}{4m^2-3}\leq 2\times\frac{3m^2-3+m^2}{4m^2-3}=2, \text{ 当且仅}$$

当 $3m^2-3=m^2$, 即 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立,

综上可知, $|PQ|$ 的最大值为 2. (17 分)