

巴中市普通高中2023级“零诊”考试

数学试题

(满分150分 120分钟完卷)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、班级、考号填写在答题卡规定的位置。
2. 答选择题时请使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 非选择题答题时必须用0.5毫米黑色墨迹签字笔, 将答案书写在答题卡规定的位置, 在规定的答题区域以外答题无效, 在试题卷上答题无效。
3. 考试结束后, 考生将答题卡交回。

一、单选题: 本题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < a\}$, $B = \{x | 0 < x < 2\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的取值范围是
A. $a \geq 2$ B. $a < 2$ C. $a > 2$ D. $a \leq 2$
2. 已知复数 $z = 1 + 2i$, 则 $\left|\frac{1}{z}\right| =$
A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
3. $(x + \frac{2}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中 x^3 的系数为
A. 12 B. 60 C. 160 D. 240
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $c + c\cos A = \sqrt{3}a\sin(A+B)$, 则 $A =$
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
5. 已知 $a > 0, b > 0$, 若 $a + \frac{2}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{b}{2}$ 的最小值为
A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$
6. 将一枚质地均匀的骰子连续抛掷2次, 则两次向上的点数之和除以4的余数为3的概率为
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{7}{36}$
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 若 $a_1 a_3 a_5 = 3\sqrt{3}$, $b_1 + b_3 + b_5 = \frac{23\pi}{4}$, 则 $\sin \frac{b_2 + b_4}{1 - a_2 a_4}$ 的值为
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

8. 在四面体 $A-BCD$ 中, M 为 AD 上一点且 $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$, P 是 BM 的中点, 在线段 AC 上存在一点 Q , 使得 $PQ \parallel$ 平面 BCD , 则 $\frac{AQ}{QC}$ 的值为
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、多选题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则
A. $x = -\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的对称轴
B. 2π 是 $f(x)$ 的周期
C. $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减
D. $f(x)$ 的最大值为2
10. 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, F_1, F_2 分别为椭圆的左, 右焦点, 过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点, 则
A. $\triangle ABF_2$ 的周长为8
B. 弦 $|AB|$ 的长的最小值为 $\frac{3}{2}$
C. 若 $\angle F_1 A F_2 = \frac{\pi}{6}$, 则 $\triangle A F_1 F_2$ 的面积为 $6 - 3\sqrt{3}$
D. AM 平分 $\angle F_1 A F_2$ 交 $F_1 F_2$ 于 M , I 为 $\triangle A F_1 F_2$ 的内心, 则 $\frac{|AI|}{|IM|} = 2$
11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , P 是一动点 ()
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$
B. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda (\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C})$ ($\lambda > 0$), 则 P 过 $\triangle ABC$ 的垂心
C. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda (\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin C} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin B})$ ($\lambda > 0$), 则 P 过 $\triangle ABC$ 的重心
D. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda (b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC})$ ($\lambda > 0$), 则 P 过 $\triangle ABC$ 的外心

三、填空题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分。

12. 乘积 $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$ 展开后共有_____项。

13. 若 $f(\sin \alpha - \cos \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, 则 $f(\sin \frac{\pi}{4}) =$ _____。

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x - e & (x \leq 0) \\ \frac{\ln x}{x} & (x > 0) \end{cases}$, 若存在 $x_1 < 0, x_2 > 0$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则

$x_1 \cdot f(x_2)$ 的取值范围_____。

四、解答题: 本题共5小题, 共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 9, a_5 = 2a_2 + 3$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

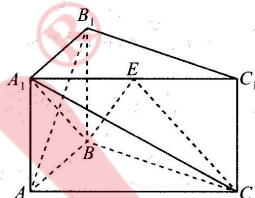
(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{2}$ 。

16. (15分)

如图所示, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AA_1 = AB$ 。

(1) 求证: $A_1C \perp AB_1$;

(2) 若 $AC = 2AB$, E 为 A_1C_1 中点, 求二面角 $A_1 - BC - E$ 的余弦值。



17. (15分)

从某校高二年级获取了容量为120的有放回简单随机样本, 将所得数学和语文入学考试成绩的部分样本观测数据整理如下:

数学成绩	语文成绩		合计
	不优秀	优秀	
优秀	48	36	
不优秀	24		
合计			120

(1) 请将题中表格补充完整, 依据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验, 是否认为数学成绩与语文成绩有关联;

(2) 在数学成绩优秀的学生中, 采用按比例分配分层随机抽样的方法选取7人, 再从7人中随机抽取3人进行座谈, 用 X 表示语文成绩优秀的人数, 求 X 的分布列、数学期望、方差。

附: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$ 。

$\alpha = P(\chi^2 \geq k)$	0.010	0.005	0.001
k	6.635	7.879	10.828

18. (17分)

函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + 2x + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处取得极值。

(1) 求 a 和 b 的值。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 且 $M \cdot m = \frac{19}{4}$, 求实数 c 的值。

(3) 设 $g(x) = f(x) - kx$ ($k \in \mathbb{R}$)。若 $g(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递减, 求 k 的取值范围。

19. (17分)

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 渐近线方程为 $y = \frac{1}{2}x$, 焦距为 $2\sqrt{5}$ 。设直线 $y = kx + t$ 与 C 交于 A, B 两点。

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若 $k = 1$ 且 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 求 t 的值;

(3) 若 $t = -3k$, 过 A, B 分别作双曲线的切线, 且相交于点 M , 求点 M 的轨迹方程。